BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III
LXI
B
10
NAPOLI

LXI - B. 10.

Digitized by Google

SUITE DES

MEMOIRES

DE

MATHEMATIQUE

ET

DE PHYSIQUE,

Tirez des Regiſtres

DE L'ACADEMIE ROYALE

DES SCIENCES,

DE L'ANNÉE M. DCCVI.

NAPOLI

A AMSTERDAM,

Chez PIERRE DE COUP, Marchand Libraire à côté de la Maiſon de Ville.

M. DCCVIII.

Avec Privilege de N. S. les Etats de Hollande & de West-Friſe.

OBSERVATION

De l'Eclipſe de Lune du 28 Avril 1706 faite à l'Obſervatoire Royal.

PAR Mrs CASSINI ET MARALDI.

*LE Ciel qui a été couvert une partie de la nuit du 27 au 28 Avril, ne nous a pas permis d'obſerver le commencement de l'Eclipſe, qui ſuivant le calcul devoit arriver 30 minutes après minuit, la Lune ne s'étant pas pû voir qu'à 1h 30′ au travers des nuages qui empêchoient de voir ſa partie éclipſée.

On l'a commencé de voir un peu plus diſtinctement à 1h 35′ ; mais les nuages qui paſſoient devant la Lune empêchoient de voir le terme de l'ombre bien diſtinct pour pouvoir meſurer la grandeur de l'Eclipſe avec préciſion.

Nous avons obſervé en deux manieres differentes cette Eclipſe, l'une par le Micrometre poſé au foier de la Lunete de 8 pieds, l'autre par la Lunete poſée ſur la machine parallatique, en obſervant le paſſage des bords de la Lune & des cornes par les fils qui ſe croiſent au foyer de la Lunete.

Les nuages qui paſſoient ſouvent devant la Lune, & l'ont auſſi entierement couverte pluſieurs fois differentes, ont empêché de marquer exactement les phaſes de l'Eclipſe, & l'entrée & ſortie des taches de l'ombre.

* 5. Mai 1706.

à 1^h 34′ ½	L'ombre éloignée de Grimaldi de la longueur de cette tache.			
1 38	En meſurant avec le Micrometre la partie claire de la Lune, nous trouvâmes ſa partie éclipſée d'environ 6 doits ; mais cette obſervation nous paroît un peu douteuſe.			
1 45	La grandeur de l'Eclipſe étoit de	5 doits	52′	
1 47		5	48	
1^h 53 ½	La grandeur de l'Eclipſe étoit de	5	45	
1 55	L'ombre à Promontorium acutum.			
1 55	L'Eclipſe eſt de	5	40	
1 57	L'ombre étoit fort proche de Dionyſius.			
2 0	L'Eclipſe eſt de	5	33	
2 2 ¾	L'ombre étoit à peu près dans la même ſituation à l'égard de Dionyſius.			
2 4	La Lune éclipſée de	5	26	
2 7	La Lune ſe couvre			
2 11	L'ombre quitte Mare humorum			
2 15	La Lune s'étant éclaircie l'Eclipſe eſt de	5	envir.	
2 20	La grandeur de l'Eclipſe.	4	51	
2 24	L'Eclipſe eſt de	4	45	
2 29	L'Eclipſe eſt de	3	20	
2 31	La Lune ſe couvre, & reſte preſque toûjours couverte juſqu'à 2^h 59′ que l'Eclipſe n'étoit plus que de 3 doits 34′.			
3 2 ½	Fin de l'Eclipſe.			

Par

Par la Machine parallatique.

à 1h	42′	½	Grandeur de l'Eclipſe.	4doits	58′
1	48	¾		5	12
1	58	13		5	10
2	4	40		5	7
2	24	30		3	49
3	3		Fin de l'Eclipſe.		

OBSERVATION

De l'Eclipſe de Lune du 28 Avril 1706 faite à l'Obſervatoire.

PAR Mrs. DE LA HIRE.

*LE Ciel fut tout couvert, & il plut dans tout le commencement de cette Eclipſe; mais vers le milieu la Lune commença à paroître entre les nuages. Nous n'en pûmes faire que les obſervations ſuivantes avec le Micrometre appliqué à la Lunete de 7 piés.

à 1h	43′	24″	La Lune étoit éclipſée de	5doits	40m.
	46	16		5	40
2	0	44		5	27
	8	12		5	19
	20	38		4	34
	41	46		3	15
3	4	28	Fin de l'Eclipſe, mais un peu douteuſe, à cauſe qu'on ne peut pas bien juger de l'ombre veritable qui ne paroit plus ſur le diſque de la Lune.		

* 5. Mai 1706.

L'ombre paſſa un peu au-delà du *Promontorium acutum*, & il nous ſembla qu'il fut tout caché à $1^h\ 51'\ 30''$; mais il étoit fort difficile d'en bien juger, à cauſe que l'ombre paroiſſoit aller fort lentement en cet endroit.

Nous ne pûmes pas obſerver les Emerſions des Taches ni même de Tycho, les nuages qui paſſoient continuellement ſur le corps de la Lune ne le permettant pas.

L'ombre étoit fort noire, & lorſque le Ciel étoit le plus ſerein, on voyoit aſſez difficilement le bord du diſque qui étoit obſcurci. Elle étoit d'ailleurs aſſez nette & tranchée.

Nous obſervâmes auſſi le diametre de la Lune de $29'\ 37''$ à la hauteur de $15°\ 40'$.

Nous avions fait le jour précedent quelques obſervations de la Lune, comme ſon paſſage par le meridien; pour le comparer à celui qui précedoit l'Eclipſe; mais on ne pût pas à cauſe du mauvais temps.

Il faut remarquer que dans les Eclipſes de Lune, lorſque l'ombre eſt fort noire, ce qui arrive aſſez rarement, il eſt difficile de déterminer l'Emerſion des Taches, qu'on ne peut pas voir avant qu'elles ſoient ſorties; car on ne diſtingue pas facilement les Taches dans l'ombre.

OBSERVATIONS
SUR LE FER
AU VERRE ARDENT.

PAR M. HOMBERG.

*LE Fer forgé étant expoſé au verre ardent en petits morceaux, comme ſont les pointes de clous de Marêchal ou des broquettes de Tapiſſier, s'y fond aſſez vîte, mais d'une maniere differente des autres metaux. Tous les metaux quand ils commencent à fondre, c'eſt toute la maſſe enſemble qui ſe liquefie peu à peu, comme l'on voit le plomb ſe fondre ou l'étain au feu ordinaire : mais le fer ſe fond au Soleil tout autrement. Voici comment.

D'abord il paroit ſur la ſuperficie du fer une matiere fondue comme de la poix noire, qui ſe diſtingue fort bien d'avec une autre ſubſtance du fer qui eſt blanche & plus difficile à fondre, ſur laquelle cette matiere noire coule & change de place comme la cire fondue couleroit ſur un metal chaud. Le fer ſe tient quelquefois un bon *miſerere* dans cette ſituation avant que la matiere blanche commence à ſe fondre, laquelle paroit inégale & raboteuſe ſous cette matiere noire, juſqu'à ce que toute la maſſe du fer ſoit fondue : alors ſi le fer eſt ſoûtenu d'un charbon, la matiere noire ſe joint au charbon, s'enflamme, le creuſe fort vîte & ſaute en

* 8. Mai 1706.

étincelles, qui petillent comme le fer qui brûle dans la forge d'un Maréchal.

Les étincelles en ſortent d'abord fort groſſes & en grande quantité ; elles diminuent enſuite juſqu'à ce qu'à la fin il reſte une maſſe de fer fondu qui ne jette plus d'étincelles, & qui ſe tient en fonte auſſi tranquilement qu'une goute d'huile ſe tient ſur une aſſiete d'argent.

Pendant que le fer eſt dans cette fonte tranquile où il ne jette plus d'étincelles, il s'amaſſe ſur ſa ſuperficie un verre tranſparent, mais qui ne s'y tient pas de la même maniere qu'il fait ſur les autres metaux qui ſe vitrifient, où le verre nage ſur le metal ſans le bourſouffler, comme une goute de graiſſe nageroit ſur l'eau chaude : mais le verre du fer ſe bourſouffle & s'éleve en écume blanche, qui de temps en temps ſe rabat en une goute unie & tranſparente, & qui un moment après ſe releve en écume ; ce qui arrive ſucceſſivement & ſouvent. Mais le fer étant refroidi, le verre n'eſt ni blanc ni tranſparent comme il paroiſſoit étant liquide, mais fort noir comme ſeroit un émail noir.

Pendant le temps que le fer petille & que les étincelles en ſautent, il s'attache ſur toute la ſuperficie du charbon qui ſoûtient le fer, une très-grande quantité de petites boulettes, qui ne ſont autre choſe que la partie inflammable du fer qui s'en ſepare en forme d'étincelles, & qui tombe ſur le charbon. Si l'on remue un peu le charbon pendant la fonte tranquile du fer, enſorte que ces petites boulettes des étincelles puiſſent retomber ſur ce fer fondu ; alors ce fer recommence à jetter des étincelles juſqu'à ce que la matiere étincelante en ſoit entierement reſortie.

Il y a beaucoup d'apparence que la matiere qui fournit ces étincelles, ou la matiere inflammable du fer, eſt cette matiere noire qui ſe fond d'abord que le fer paroit au foyer du verre ardent; puiſque le fer ne commence à jetter des étincelles, que lorſque cette matiere noire commence à toucher le charbon, & que la partie du fer qui ſe tient en une fonte tranquile ſans étinceler, eſt cette matiere blanche du fer qui fond la derniere; que la premiere eſt une matiere non encore metallique, & que la derniere eſt le vrai fer ou la partie metallique du fer.

Le hazard nous a découvert que dans toutes les cendres il ſe trouve une poudre noiratre qui eſt un vrai fer: ce que l'on peut verifier de cette maniere. Brûlez en cendres quelle ſorte d'herbes ſeches ou du bois que vous voudrez: prenez les précautions neceſſaires pour qu'il ne s'y puiſſe mêler quelque matiere ferrugineuſe: puis fouillez dans ces cendres avec une lame de coûteau bien nette & qui ſoit aimantée d'un Aimant vigoureux; vous trouverez au bout de vôtre coûteau une barbe d'une poudre noiratre comme ſi vous l'aviez trempé dans de la limaille de fer. Ramaſſez cette poudre: faites cela tant de fois que vous en ayez aſſez pour la pouvoir fondre; ce que vous ferez aiſément au verre ardent: il vous en viendra une grenaille de fer, qui jettera des étincelles ſur le charbon comme fait un morceau de fer qu'on rougit fortement à la forge.

Cette experience nous marque avec beaucoup d'évidence que dans le brûlement ou dans l'incineration de toute matiere vegetale il ſe compoſe du fer, puiſqu'il s'attache au bout du coûteau aimanté en forme d'une poudre noiratre;

ce qui n'arrive à aucune autre matiere qu'au fer ou à l'acier, qui eſt du fer purifié : Et comme dans le brûlement de quelque matiere vegetale que ce ſoit, les cendres qui en proviennent conſiſtent en une partie de ſel fixe de la plante, en un peu d'huile fetide & en un peu de terre; il pourroit fort bien être que la ſubſtance du fer conſiſte de même en partie de terre & de ſel fixe de la plante, dont les parties ſont ſi fortement collées enſemble & envelopées dans le feu par l'huile fetide du vegetal brûlé, que la flamme à de la peine à les ſeparer les unes des autres, & qu'elles s'y fondent plutôt enſemble pour produire un corps dur & cependant malleable que nous appellons du fer.

Nous avons obſervé que la matiere noire du fer eſt une matiere huileuſe, qui s'enflamme avec le charbon ou ſemblable & non autrement. Il pourroit bien être que cette matiere huileuſe ou noire du fer ſoit un reſte ſuperflu de l'huile du bois ou d'autre vegetal, qui par ſon incineration a produit le fer, & qui ne s'eſt pas joint aſſez intimement ou en trop grande quantité avec les autres principes qui entrent dans la compoſition du fer, & qui ſe rejoint dans l'occaſion aux parties huileuſes ou inflammables du charbon comme à ſon ſemblable, & y produit cette inflammation ou étincellement comme la matiere huileuſe vegetale ou animale en ſe joignant à quelque ſel lui donne le caractere du ſalpetre, & qui s'en détache en s'enflammant à chaque fois qu'elle touche à un charbon ardent.

L'étincellement du fer n'arrive ordinairement que lorſqu'on le fond ſur un charbon : car ſi on le fond ſur quelqu'autre metal, dans un creu-

creuſet ou ſur de la porcelaine ; le fer n'étincelle point, & alors la matiere blanche du fer ſe ſepare de la noire dans la fonte, & fait un culot à part, ſur lequel nage la matiere noire, comme les ſcories ſurnagent un metal fondu. La matiere blanche eſt dure comme l'acier trempé ; & étant caſſée, elle eſt jaunâtre en dedans, & quelquefois blanche comme de l'argent. La matiere noire, étant réduite en ſcories, eſt tendre & friable comme du verre outré au Soleil.

Le fer joint aux autres metaux par la fonte produit des effets differens ſelon les metaux auſquels on le joint, & ſelon le temps qu'on le joint à ces metaux. Quand on fond le fer avec quelque metal ſulphureux, comme avec l'or, avec le cuivre ou avec l'étain ; la matiere blanche du fer ſe mêle avec ces metaux, & la matiere huileuſe ou noire les ſurnage comme une ſcorie qui s'en ſepare fort aiſément par un coup de marteau, comme toutes les ſcories ſe ſeparent de deſſus les metaux ſur qui elles tiennent.

Quand on fait fondre le fer le premier ſur un charbon, & qu'enſuite on met l'autre metal ſur ce fer fondu ; alors le fer continuë à jetter des étincelles juſqu'à ſauter preſqu'entierement de deſſus le charbon en petits grains, qui ſont d'abord comme de la pouſſiere, enſuite comme du ſable, & à la fin comme des têtes d'épingles ; & il emporte avec lui preſque toute la maſſe de l'autre metal. Mais quand on fait fondre l'autre metal le premier & qu'on met le fer deſſus ce metal fondu ; alors très-ſouvent il ne ſe fond que ſeulement la matiere noire du fer, ſans qu'on puiſſe faire fondre la matiere blan-

che, laquelle nage ſur l'autre metal, ou s'y enfonce ſelon que le fer eſt plus ou moins peſant que l'autre metal, & la matiere noire du fer leur ſert de ſcories. Dans cette ſituation le fer ne petille & n'étincelle jamais, même avec les metaux ſulphureux, comme nous allons voir dans le détail ſuivant.

Quand on fait fondre du fer juſqu'à ce qu'il ait ceſſé de jetter des étincelles, & juſqu'à ce qu'il ſe tienne en une fonte tranquile; ſi pour lors on met un morceau d'argent deſſus, l'argent ſe fond & les deux metaux ſe confondent en une maſſe, ſans que le fer recommence à jetter des étincelles: mais ſi l'on fait fondre l'argent le premier, & ſi l'on met un morceau de fer ſur cet argent fondu, l'argent ſe tiendra en fonte, & le fer ne ſe fondra pas. Il arrivera pour lors un effet qui m'a paru particulier à l'argent, qui eſt que la partie huileuſe du fer ſe fondra d'abord ſeule; elle coulera de deſſus le fer, & entrera dans la maſſe de l'argent fondu, comme l'eau entre dans une éponge, laiſſant la partie du fer la plus blanche & la plus metallique deſtituée de ſon ſoufre brûlant qui lui ſert ordinairement de fondant; & c'eſt-là la raiſon pourquoi le fer pour lors ne ſe fond que très-difficilement. L'argent qui a bû ce ſoufre devient noiratre & fort caſſant; il le faut mettre à la coupelle de plomb pour l'en ſeparer.

Voilà l'effet du mélange du fer avec l'argent, qui eſt le metal le moins ſulphureux que nous aions. Il n'arrive pas la même choſe quand on mêle le fer avec un metal ſulphureux, comme eſt l'or, le cuivre & l'étain; ſoit qu'on les faſſe fondre devant le fer, ou qu'on faſſe fondre le

le fer le premier : parce que ces metaux aiant d'eux-mêmes beaucoup de ſoufre, ils ne boivent pas le ſoufre brûlant du fer comme faiſoit l'argent qui a fort peu de ſoufre.

Le fer fondu avec l'un de ces trois metaux produit encore des effets differens. Etant mêlé avec l'or, il continue à petiller comme ſi on l'avoit fondu ſeul, ſans jetter une plus grande quantité d'étincelles : ce qui marque que le ſoufre de l'or n'eſt pas un ſouffre brûlant comme celui du fer; car il en auroit augmenté les étincelles.

Quand on fond un morceau de fer juſqu'à la ceſſation du petillement; ſi l'on met pour lors une plaque de cuivre rouge deſſus, il arrive premierement que le cuivre devient blanc comme de l'argent, après quoi il devient noir & luſtré comme du vernis noir de la *Chine*, troiſiémement il ſe ride comme une pomme fort ridée reſtant toûjours noir, & un moment après il ſe fond & ſe confond avec le fer: mais comme le fer eſt plus leger que le cuivre, il monte ſur la ſuperficie du cuivre comme une ſcorie blanchatre, & s'étant joint au ſoufre du cuivre, il recommence à jetter des étincelles en plus grande quantité qu'auparavant, & beaucoup plus larges & plus brillantes que lorſqu'il petilloit ſeul & ſans le cuivre ; ce qu'il ne faiſoit pas avec l'or: marque évidente que le cuivre contient un ſoufre brûlant auſſi-bien que le fer, & que l'or n'en contient pas. Ces étincelles brillantes durent long-temps: à la fin elles ceſſent, & la maſſe fondue continue à jetter une très-grande quantité de petits grains de metal ſans étincelles. Ces petits grains ſont d'abord fort menus, & ne s'élevent pas plus de quatre ou cinq pouces; mais à la fin ils deviennent auſſi

gros que des têtes des plus groſſes épingles, & ils s'élancent en l'air de la hauteur d'un pied ou d'un pied & demi. Quand on met quelque baſſin audeſſous du charbon qui tient cette maſſe petillante; on reçoit ces petits grains qui ſautent en l'air, que l'on reconnoît fort bien & ſans loupe, les uns de cuivre pur, les autres de fer fondu, & d'autres de fer mêlé de cuivre.

L'étain aiant été mis en fonte au Soleil; ſi l'on y ajoûte du fer, le fer ſe fond promptement & ſe mêle parfaitement avec l'étain, & mieux qu'aucun autre metal. Ils ſe tiennent tranquilement en fonte, ſans que le fer petille ou jette des étincelles: ce qui marque que le ſoufre de l'étain approche de celui de l'or, & qu'il n'eſt pas brûlant comme celui du fer ou du cuivre. Ils fument un peu enſemble, & ſe vitrifient en un émail noir. Le metal qui ſe trouve ſous l'émail, eſt blanc comme de l'argent de coupelle, & dur & caſſant comme du fer fondu.

Si à cet étain & fer fondu enſemble on ajoûte du plomb de chacun parties égales, la matiere ſe fondra difficilement; & en la laiſſant refroidir, la maſſe fonduë produit ſur le champ une eſpece de vegetation, & jette ſur toute ſa ſuperficie une poudre jaune de l'épaiſſeur d'un doigt; en ſorte que la poudre qui ſort de la maſſe fonduë, paroît le double de celle qui l'a produite, & la maſſe fonduë qui étoit fort boſſuë devient plate & même creuſe. Cette poudre ſort d'abord en forme de champignons ſur la ſuperficie de la maſſe fonduë, qui tombent enſuite en une poudre jaune. Si l'on ajoûte un peu de cuivre à ce mélange de fer, d'étain & de plomb; il

ne

ne produit plus de champignons ni de poudre.

L'étain étant fondu le premier, & les clous de fer mis ſur cet étain fondu pour ſe fondre enſuite; il ne ſe fait point de petillement ni d'étincelles, très-peu de fumée, & la fonte eſt tranquile, comme nous venons de le voir. Mais ſi l'on fond le fer le premier, & ſi l'on met l'étain ſur ce fer fondu; l'étain ſe calcine dans un moment en une chaux blanche, & auſſi-tôt après il ſe fond & ſe confond avec le fer: il en ſort une prodigieuſe quantité de fumée: le fer & l'étain petillent enſemble ſans jetter d'étincelles, & chaque grain qui en ſaute en très-grand nombre, entraîne avec lui un filet de fumée blanche, laquelle ſe durcit en l'air & tient enſemble comme de la toile d'araignée, & remplit l'air de flocons & de fils blanchâtres qui couvrent tout ce qui ſe trouve alentour. Chaque grain de ce metal qui s'élance en l'air, & qui forme un fil blanc depuis la maſſe du metal d'où il ſort juſqu'à la hauteur où il peut aller, monte juſqu'à douze, quinze & dix-huit pouces; ce qui fait un mouvement fort agréable aux yeux, qui reſſemble à une grande quantité de fuſées volantes & de ſerpentaux qu'on lâcheroit en même temps.

L'étain fin mis ſeul au verre ardent fume beaucoup, & s'en va enfin entierement en fumée, ne laiſſant aucun reſidu. L'étain de vaiſſelle fume plus que l'étain fin, s'en va plus vîte en fumée, & laiſſe à la fin une matiere terreuſe qui ne change plus. L'étain & le plomb, parties égales, fument beaucoup, & ſe vitrifient à la fin. Ce verre fume encore quelque temps, puis il ceſſe de fumer, & ſe change à la fin en une matiere terreuſe.

OBSERVATION DE L'ECLIPSE DU SOLEIL

Faite à Marli le 12 Mai 1706. en presence du ROI, *de* MONSEIGNEUR, *& de* MONSEIGNEUR LE DUC DE BOURGOGNE.

*MONSIEUR l'Abbé *Bignon* aiant communiqué à l'Academie une Lettre qu'il avoit reçûe de M. le Comte de *Pontchartrain*, par laquelle il lui mandoit que le Roi vouloit qu'on choisît quelques Astronomes de l'Academie Royale des Sciences pour aller observer à *Marli* en sa présence l'Eclipse du Soleil, pendant que les autres resteroient à l'Observatoire pour y faire les observations de cette Eclipse. Mrs *Cassini* le fils & *de la Hire* le fils furent choisis pour aller à *Marli*, & ils porterent avec eux un Quart de cercle de deux pieds de rayon, une Pendule à seconde, une à demi-seconde, & plusieurs Lunetes de diverses grandeurs.

On avoit attaché à deux de ces Lunetes, dont l'une étoit de neuf & l'autre de sept pieds, deux supports qui portoient une planchette perpendiculaire à l'axe de la Lunete, à la distance de l'oculaire d'environ deux pieds, & l'on avoit tracé sur un carton posé sur cette planchette un cercle égal à l'image que le Soleil passant par la Lunete formoit sur ce carton. Ce cercle étoit di-

* 15. Mai 1706.

diviſé par des cercles concentriques en doits & demi-doits.

On avoit placé au foyer commun des deux verres d'une autre Lunete de cinq pieds, un chaſſis avec des fils de ſoie ſimple paralleles entr'eux, dont les deux extrêmes comprenoient exactement l'image du Soleil. Les autres fils diviſoient cet eſpace en douze parties égales.

Ils arriverent à *Marli* le 11 Mai après midi, où M. le Comte de *Pontchartrain* les aiant preſenté au Roi, Sa Majeſté leur ordonna de choiſir un lieu propre pour faire exactement l'obſervation de cette Eclipſe.

Monſeigneur le Duc de *Bourgogne* jugea à propos de mettre les Inſtrumens dans le Salon de *Marli* qui regarde la Caſcade que l'on appelle ordinairement la Riviere, lequel eſt expoſé au Midi avec un peu de declinaiſon vers l'Orient. On y plaça le ſoir la Pendule à ſeconde, & l'on obſerva en ſa préſence & de toute la Cour des hauteurs du cœur du Lion avec le Quart de cercle pour regler la Pendule.

Le lendemain matin 12 Mai l'on obſerva dans le Salon du Château où étoient les Inſtrumens quelques hauteurs du Soleil pour ſavoir l'état de la Pendule; & aiant placé les trois Lunettes dont on a parlé ci-deſſus ſur la terraſſe qui eſt près de ce Salon, on attendit le moment de l'Eclipſe.

Monſeigneur le Duc de *Bourgogne* fut le premier qui l'apperçût entre les nuages à $8^h\ 28'\ 57''$ lorſqu'elle étoit éclipſée d'environ un demi doit, & jugea qu'il y avoit au moins deux minutes qu'elle avoit commencé; de ſorte que l'on peut déterminer ſon commencement à $8^h\ 26'$. Le Soleil étant encore entre des nuages rares, l'on dé-

détermina les premieres Phaſes avec les reticules qui étoient placez au foyer de la Lunete de cinq pieds que l'on avoit attachée ſur le Quart de cercle ; & lorſque le Soleil fut entierement dégagé des nuages, on l'obſerva par le moien de ſon image qui ſe peignoit ſur le carton exposé aux Lunetes.

Monſeigneur le Duc de *Bourgogne* détermina lui-même la plûpart des Phaſes lorſque l'Eclipſe arrivoit à differens doits, & l'on marquoit au même inſtant à la Pendule le temps de l'obſervation. Il détermina auſſi en même temps la grandeur de l'Eclipſe & la diſtance des cornes pour trouver la proportion du diametre apparent du Soleil à celui de la Lune, & il trouva le diametre apparent de la Lune plus grand que celui du Soleil, de même qu'il eſt marqué dans les Tables.

Le Roi vint voir l'Eclipſe lorſqu'elle augmentoit encore, & faiſoit marquer à la Pendule l'heure des Phaſes differentes & le temps de la plus grande Eclipſe. Sa Majeſté y demeura encore long-temps après qu'elle eut commencé à diminuer. Monſeigneur, Madame la Ducheſſe de *Bourgogne*, Monſeigneur le Duc de *Berri*, Madame, Monſieur le Duc d'*Orleans*, Monſieur le Duc & Monſieur le Prince de Conti & toute la Cour aſſiſterent à l'obſervation, & eurent le plaiſir de déterminer eux-mêmes le temps des Phaſes.

L'après-midi on obſerva des hauteurs correſpondantes à celles du matin, & Monſeigneur le Duc de *Bourgogne* ſe fit expliquer la methode dont l'on ſe ſert pour déterminer les Eclipſes par la projection de la terre dans l'orbe de la Lune.

Ob-

Obſervation de l'Eclipſe du Soleil à Marli.

Le 12 Mai à $8^h\ 28'\ 57''$ du matin Monſeigneur le Duc de *Bourgogne* obſerva que le Soleil étoit deja éclipſé d'environ un demi doit, & qu'il y avoit au moins deux minutes que l'Eclipſe avoit commencé.

8^h	$38'$	$25''$	Deux doits & demi.
8	40	28	Trois doits.
8	51	58	Cinq doits.
8	56	45	Six doits.
9	3	31	Sept doits.
9	13	2	Huit doits & demi.
9	15	33	Neuf doits.
9	22	27	Dix doits.
9	33	7	Près de onze doits.
9	38	36	Dix doits & demi.
9	41	36	Dix doits.
9	48	7	Neuf doits.
9	53	38	Huits doits.
9	56	18	Sept doits & demi.
10	6	11	Six doits.
10	12	23	Cinq doits.
10	18	11	Quatre doits.
10	27	42	Deux doits & demi.
10	36	48	Un doit.
10	41	54	Fin de l'Eclipſe.

OBSERVATION

De l'Eclipſe de Soleil faite le 12 Mai 1706 dans l'Appartement inferieur de l'Obſervatoire.

PAR Mrs. CASSINI ET MARALDI.

*ON a obſervé en deux manieres differentes l'Eclipſe de Soleil qui eſt arrivée le 12 de ce mois au matin. On avoit mis au foier de la Lunete de 34 pieds, placée ſur la terraſſe de l'Obſervatoire, un papier bien tendu ſur lequel ſe peignoit l'image du Soleil, dont le diametre étoit preſque de quatre pouces. On avoit diviſé ce diametre en 12 parties par ſix cercles concentriques qui repréſentoient les douze doits, dont chacun étoit un peu moins de quatre lignes.

Pour obſerver les doits de l'Eclipſe par cette Lunete, on faiſoit concourir l'image du Soleil avec le cercle exterieur, & dans cette ſituation on obſervoit quand la concavité de l'Eclipſe arrivoit à une de ces circonferences qui déterminoient les doits qui reſtoient éclairez, & à cet inſtant on marqua l'heure & la minute. M. *Couſtard* & M. *Butterfield*, qui ſont exercez dans ces ſortes d'obſervations, eurent ſoin d'obſerver les doits de l'Eclipſe avec cette Lunete.

On a auſſi obſervé l'Eclipſe dans la Tour orientale & dans la Salle, en préſence de Monſieur le Nonce, de pluſieurs Princeſſes, de plu-

* 15. Mai 1706.

plusieurs Messieurs de l'Academie, & d'un grand nombre d'autres personnes considerables.

Les Phases de l'Eclipse ont été observées par un Micrometre posé au foyer de la Lunete de 8 pieds, par le moyen duquel on a mesuré vers le commencement & vers la fin la distance des cornes. Dans la suite de l'Eclipse on a observé la partie claire du Soleil, d'où l'on a conclu les doits éclipsez & la plus grande obscurité.

Les nuages qui couvroient presque tout le Ciel le matin avant l'Eclipse, ne permettoient pas de voir le Soleil que par intervalles. Nous le vîmes à 8^h 23′ lorsque l'Eclipse n'avoit point commencé. Le Soleil se couvrit aussi-tôt; & s'étant découvert deux minutes après, nous vîmes à 8 heures 25′ 38″ le bord occidental du Soleil qui manquoit déja, de sorte que l'Eclipse avoit commencé un peu auparavant. Le Soleil se couvrit de nouveau, & ne parut que vers les 8^h 40′ lorsque l'Eclipse paroissoit déja grande. Durant le reste de l'Eclipse le temps a été plus favorable, principalement vers le milieu & vers la fin.

Observations faites par le Micrometre.			*Par la Lunete de 34 pieds.*	
8^h 25′ 38″	L'Eclipse avoit commencé.			
	L'Eclipse étoit de	3 doits 48′		
43		4 30		
49		6 16		
8 55 20		7		doits
9 1 30		8 0	9^h 4′ 0″	7
9 0			9 8 0	8
				12 20

Observations faites par le Micrometre.		*Par la Lunete de 34 pieds.*	
12′ 20″	8 doits 40′		
14 0	9 18		doits
19	9 23	9h 20′	10
9 23	10 48		
27	10 48		
9 28 55	10 48		
34 45	10 50	9h 32′ *Le temps de la plus grande obſcurité.*	11

L'Eclipſe a augmenté juſqu'à preſent, dans la la ſuite elle va en diminuant.

9 40	10	14	9 42 0		10
9 58	7	21	9 54		8
10 0 0	6	56	10 0		7
10 0	4	45	10 7 30		6
13 30	4	37			
10 16	4	14	10 19 0		4
24	2	42	10 29		2
10 28 40	2	6	10 34		1
10 30 46	1	36	10 40 49 Fin de l'E-		
10 34 10	1	9	clipſe par la Lunete de		
10 36 30	0	40	34 pieds.		

10 40 47 Fin de l'Eclipſe par la Lunete de 8 pieds.

Quoique la partie lumineuſe du Soleil qui eſt reſtée dans la plus grande obſcurité n'ait été qu'environ la douziéme partie de ſon diametre, ſa lumiere étoit encore aſſez grande : elle paroiſſoit ſeulement plus foible & plus rougeâtre.

Quelques minutes avant la fin de l'Eclipſe, nous étions attentifs à obſerver avec la Lunete de 8 pieds le moment qu'elle finiroit. Nous remar-

remarquâmes que la commune ſection de l'obſcurité & de la lumiere n'étoit pas une portion de cercle bien terminée, mais qu'elle étoit inégale, & qu'il y avoit des pointes obſcures, une principalement plus conſiderable que les autres, qui reſtoient dans le Soleil plus que le reſte de la circonference. Ces pointes obſcures ſont des montagnes qui ſe rencontrent dans la circonference de la Lune. On voit quelquefois avec les Lunetes de ſemblables pointes lumineuſes ſur la circonference du diſque de la Lune, lors même qu'elle eſt expoſée directement au Soleil.

Cette Eclipſe de Soleil eſt arrivée 14 jours $7^h\frac{3}{4}$ après l'Eclipſe de Lune que nous obſervâmes le 27 d'Avril dernier. En raiſon de 29 jours 12 heures & trois quarts, qui eſt le temps moyen du retour de la Lune au Soleil, il devoit y avoir entre l'Eclipſe de la Lune & celle du Soleil 14 jours 18 heures & un peu plus d'un tiers. La difference entre l'intervalle moyen & le veritable eſt 10 heures & un tiers, dont l'intervalle veritable eſt plus court que le moyen. Cette difference vient en partie du mouvement de la Lune, qui a parcouru dans ce temps ſon demi cercle plus proche de la terre, où eſt ſon Perigée & ſon mouvement plus vîte, & en partie de la parallaxe de la Lune, & elle eſt aſſez bien repréſentée par les hypotheſes Aſtronomiques.

OBSERVATION

De l'Eclipſe de Soleil du 12 Mai 1706 au matin à l'Obſervatoire Royal dans la Tour orientale à la hauteur de la grande Salle.

PAR M. DE LA HIRE.

* J'AI obſervé cette Eclipſe de la même maniere que j'ai accoûtumé de les obſerver. Le Micrometre dont je me ſers pour prendre la plus grande largeur ou le diametre de la partie du Soleil qui reſte éclairée, eſt appliqué à ſa Lunete ordinaire qui a 7 piés de foyer. Chaque intervalle des filets qui ſeparent la longueur de l'ouverture du Micrometre vaut 12′ 45″, comme je l'ai verifié par des methodes très-ſûres, & dix tours de la groſſe vis dont le pas eſt très-fin, & qui conduit le curſeur qui eſt un filet parallele aux autres, rempliſſent exactement un intervalle des filets. Ce Micrometre eſt le même dont M. *Picard* ſe ſervoit, & qu'il avoit conſtruit avec un très-grand ſoin, comme il eſt rapporté dans le Livre des Ouvrages de pluſieurs Academiciens que j'ai fait imprimer en 1693 page 413 ſur l'imprimé de M. *Auzout*.

Dans cette Eclipſe j'ai obſervé le temps des Phaſes pour chaque demi-tour de la vis qui méne le curſeur, ou pour chaque 20e. d'un intervalle des filets paralleles, ce qui vaut 38″¼ de degré, & ce qui me donnoit pour chaque obſervation près de la cinquiéme partie d'un doit; mais ces obſervations ont été faites ſans avoir aucun

* 15. Mai 1706.

aucun égard aux doits, d'où il m'a été facile de les conclure & leurs minutes, par les parties proportionnelles entre le grand nombre des obſervations que j'ai faites.

Mais comme je ſai par experience que lorſqu'on regarde avec le verre noir les filets hors du diſque du Soleil, on ne peut qu'avec peine les appercevoir; ce qui empêche de juger ſi l'un des filets raſe exactement le diſque apparent du Soleil, & c'eſt ce qui arrive ordinairement quand le Ciel eſt bien pur; je me ſuis ſervi du moyen que j'ai expliqué dans mes Tables Aſtronomiques pour prévenir cet inconvenient. J'ai tendu au-devant du verre objectif ſur le bout du tuyau de la Lunete, une toile de ſoye blanche fort fine & aſſez claire, ce qui n'empêche pas de voir le Soleil très-diſtinctement, & ce qui donne en même temps une blancheur dans toute l'ouverture de la Lunete qui fait appercevoir facilement les filets hors du diſque du Soleil, comme s'il y avoit un leger brouillard au devant du Soleil. Cette methode eſt auſſi très-commode pour les obſervations de la Lune dans le même cas.

Le Ciel étoit fort brouillé avant le commencement de l'Eclipſe; mais comme il y avoit de temps en temps quelques intervalles entre les nuages, j'étois attentif à obſerver le Soleil, lorſque je m'apperçûs qu'il y avoit une très-petite partie de ſon diſque où la Lune commençoit à entrer, & je jugeai que l'Eclipſe pouvoit avoir commencé 10^{s} ou 12^{s} plûtôt. Il étoit alors $8^{h}\ 25'\ 52''$, c'eſt pourquoi je marque le commencement à $8^{h}\ 25'\ 42^{s}$. Enſuite le Ciel ſe couvrit & ne laiſſoit voir le Soleil que par des intervalles trop petits pour pouvoir faire quelques ob-

obſervations exactes, juſques vers les $8^h\frac{1}{4}$ où il commença à devenir ſerein, ou en partie juſqu'à la fin de l'Eclipſe. Voici les obſervations que j'en ai faites. J'avois obſervé exactement le diametre du Soleil de 31′ 45″, d'où j'ai réduit la partie reſtante éclairée du Soleil, à la partie éclipſée, comme je la donne ici, & au lieu des minutes & ſecondes de degré que j'ai obſervées, j'y ai ſubſtitué les doits & les minutes qui leur répondent.

Il faut remarquer qu'il y a toûjours beaucoup de difficulté à obſerver les phaſes de ces Eclipſes, à cauſe du mouvement continuel du Soleil, & qu'il faut en même temps être attentif aux deux filets qui renferment la partie éclairée & qui la traverſent de biais, ce qui empêche qu'on ne puiſſe déterminer la grandeur de l'Eclipſe ſans erreur de quelques ſecondes. Il n'en eſt pas de même de l'obſervation du diametre; car on diſpoſe le Micrometre de telle maniere que le diſque du Soleil ſe meut entre deux filets paralleles.

H.	′	″	*Doits.*	*M.*	*Doits entiers.*				
8	25	42	0	0	Commencement.				
	48	42	4	27	$4\frac{1}{2}$	à	8^h	48′	57″
	52	42	5	15	5	à	8	51	27
	55	42	5	44	6	à	8	57	7
	58	17	6	13					
9	0	52	6	42	7	à	9	2	5
	6	47	7	41					
	7	57	7	55	8	à	9	8	25
	9	22	8	10					
	10	42	8	25					
	12	7	8	39					
	13	32	8	53	9	à	9	14	4
								14	52

H.	′	°	Doits.	M.	Doits entiers.				
	14	52	9	8					
	16	14	9	22					
	17	47	9	36					
	19	15	9	51	10	à	9h	20′	21″
	20	57	10	5					
	22	47	10	19					
	24	47	10	34					
	26	47	10	46					
	31	42	10	58	La plus grande obſcurité.				
	34	57	10	46					
	36	57	10	34					
	39	8	10	19					
	40	42	10	5	10	à	9	41	17
	42	17	9	51					
	43	50	9	36					
	45	22	9	22					
	46	52	9	8					
	48	20	8	53	0	à	9	47	39
9	49	47	8	39					
	51	12	8	25					
	52	42	8	10					
	54	12	7	56	8	à	9	53	46
	55	37	7	41					
	57	4	7	27					
	58	32	7	12					
10	0	2	6	57	7	à	9	59	44
	1	32	6	42					
	3	2	6	28					
	4	27	6	13					
	5	57	5	59	6	à	10	5	51
	7	27	5	44					
	8	57	5	29					
	10	27	5	15					
	11	57	5	2	5	à	10	12	8
	13	22	4	47					

H.	′	″	*Doits.*	*M.*	*Doits entiers.*				
	14	42	4	33					
	15	57	4	19					
	17	12	4	5	4	à	10^h	17′	40
	18	37	3	50					
	20	2	3	36					
	21	32	3	21					
	22	57	3	7	3	à	10	23	37
	25	47	2	37					
	27	7	2	22					
	28	37	2	7					
	29	52	1	53	2	à	10	29	14
	31	7	1	39					
	32		1	25					
	33	57	1	10					
	35	28	0	56	1	à	10	35	2
	36	57	0	41					
	38	22	0	27					
	41	6	0	0	Fin de l'Eclipſe obſervée fort exactement.				

A la fin de l'Eclipſe il paroiſſoit au bord de la Lune deux petites ondes ou éminences.

On doit remarquer que dans le fort de cette Eclipſe on ne laiſſoit pas de voir fort clair, quoiqu'il n'y eut que la douziéme partie du Soleil qui fut découverte; mais il ſembloit que le Ciel fut fort couvert de tous côtez à l'horizon, quoiqu'il fut fort ſerein.

Après avoir conſtruit mes Tables Aſtronomiques ſur toutes les obſervations que j'avois faites depuis un grand nombre d'années, & ſur celles dont l'exactitude m'étoit connue, je n'ai donné pour exemple des Eclipſes que celles qui devoient arriver depuis 1702, qui eſt l'année où elles ont été imprimées, afin d'éviter le reproche qu'on fait à quelques Aſtronomes, de ne rap-

rapporter pour exemple que quelques unes de celles qui ſont paſſées, auſquelles ils font convenir leurs hypotheſes.

Cette Eclipſe de Soleil eſt une de celles dont j'ai donné le calcul dans mes Tables, où j'avois trouvé qu'elle devoit commencer à 8^h 27′ 11″, & finir à 10^h 45′ 37″, & que ſa quantité ſeroit de 10 doits 48′. Mais la *Connoiſſance des Temps* que M. *Lieutaud* de l'Academie calcule toûjours ſur mes Tables, comme on fait auſſi nos Ephemerides, marque le commencement de cette Eclipſe à 8^h 27′ 4″, la fin à 10^h 45′ 49″ & la quantité de 11 doits 8′. Je ne parle point du milieu de l'Eclipſe, dont le temps ne peut pas être obſervé exactement.

La difference de quelques ſecondes qui ſe trouvent entre nos calculs, peut venir des parties proportionnelles où l'on peut faire quelque erreur, ce qui ne merite pas d'y avoir égard.

J'ai voulu faire cette obſervation avec un très-grand ſoin ; & pour ce ſujet je me ſuis retiré tout ſeul dans la Tour orientale de l'Obſervatoire, afin de n'être point interrompu par une foule de curieux, qui ne nous permettent pas le plus ſouvent de donner toute l'attention neceſſaire dans ces rencontres ; & j'ai trouvé que l'Eclipſe avoit commencé à 8^h 25′ 42″, qu'elle avoit fini à 10^h 41′ 6″, & que la quantité avoit été de 10 doits 58′, comme je l'ai rapporté cidevant.

Ceux qui ne ſavent pas qu'il y a de grandes difficultez, & qu'il faut emploier beaucoup d'élemens dans la conſtruction des Tables, pourront s'étonner de voir que mon calcul ne s'accorde pas exactement avec l'obſervation ; mais au contraire les Savans ſeront ſurpris qu'on ait pû

pû arriver à une ſi grande juſteſſe, & admireront la connoiſſance qu'on a acquiſe du mouvement des corps celeſtes; car il paroît que les anciens Aſtronomes étoient fort éloignez de prétendre à une auſſi grande préciſion.

Chacun pourra faire la comparaiſon de mon obſervation avec les Ephemerides qui ſont publiques, & qui ont été calculées par des particuliers ſur des Tables dont la plûpart laiſſent à juger qu'ils ſont les Auteurs.

Cette Eclipſe a été obſervée au Château de *Marli* en preſence du Roi & de toute la Cour, par deux Aſtronomes de l'Academie qui y avoient été mandez par Sa Majeſté.

La hauteur du Pole au Château de *Marli* eſt de 48° 51′ 35″, & la difference des meridiens entre ce Château & l'Obſervatoire Royal eſt de 14′ 18″ de degré ou de 57″ d'heure, comme je l'ai conclu des obſervations qui en ont été faites.

COMPARAISON

Des Forces centrales avec les Peſanteurs abſoluës des corps mûs de viteſſes variées à diſcrétion le long de telles Courbes qu'on voudra.

PAR M. VARIGNON.

*ON ſait que tout corps qui ſe meut en rond, ou en ligne courbe quelconque, eſt dans un effort continuel pour s'échaper ſuivant la tan-

* 24. Avril 1706.

tangente de cette Courbe à chaque point où il ſe trouve : de maniére qu'il s'échaperoit effectivement ſuivant cette touchante, s'il n'étoit inceſſamment retiré ou repouſſé vers le dedans de cette même Courbe.

De cet effort pour s'échaper ſuivant la touchante de la Courbe que ce corps décrit, à chaque point où il ſe trouve, il en réſulte neceſſairement un autre effort en vertu duquel ce même corps tend à s'éloigner de cette Courbe. C'eſt ce dernier effort que ſent la main qui fait tourner une pierre attachée au bout d'une corde qu'elle retient ; ſoit que cette main lui faſſe décrire un cercle, en ne lui permettant qu'une certaine longueur, toûjours la même, de cette corde ; ou qu'elle lui faſſe décrire quelqu'autre Courbe que ce ſoit, ſelon qu'elle lui en lâchera plus ou moins : c'eſt auſſi ce même effort qu'on apelle d'ordinaire la *Force centrifuge* de cette pierre, ou de tout autre corps qui ſe meut en ligne courbe. Mais comme il y en a auſſi de *centripetes*, telles que celle qu'il faudroit pour décrire une Hyperbole par raport au foyer de ſon oppoſée, vers lequel le corps qui la décriroit, tendroit toûjours à s'aprocher ; nous les avons appelées juſqu'ici du nom commun de *Forces centrales*, de même que celles que le corps *Décrivant* doit avoit en ſens contraire (ſoit qu'on le tire ou qu'on le pouſſe) vers le dedans de la Courbe qu'il décrit ; leſquelles Forces doivent toûjours être égales à celles-là (chacune à celle qui lui eſt directement oppoſée) pour les contre-balancer, & pour empêcher ainſi ce corps de s'écarter de cette Courbe. L'égalité de ces Forces-ci avec les centrales qu'elles contre-balancent, fera que dans la ſuite

on les prendra indifféremment les unes pour les autres ſelon qu'il ſera plus facile de les exprimer.

J'ai déja donné pluſieurs Regles générales pour connoître le raport de ces forces entr'elles, dans les Mémoires de 1700. J'ai même donné la maniére d'en trouver à l'infini dans ceux de 1701. J'ai donné encore en 1703 la maniére d'en trouver auſſi une infinité de pareille étendue pour le cas où pluſieurs de ces forces centrales agiroient toutes à la fois ſur le corps *Décrivant*, quelles que fuſſent leurs directions & la Courbe réſultante de leur concours d'action. De ſorte que pour rendre cette Theorie complette, il ne reſte plus (ce me ſemble) qu'à trouver de pareilles Regles pour connoître abſolument ces forces, c'eſt à dire, pour connoître leur raport à quelque force connue, telle qu'on ſuppoſe d'ordinaire la péſanteur des corps: En voici encore à l'infini, & toutes auſſi générales que les précédentes, dans la Solution du Problême ſuivant, & dans les conſequences qui s'en tirent.

Avertiſſement.

Pour démêler les Forces centrales des Corps d'avec leurs Péſanteurs, on ſuppoſera par tout dans la ſuite, que les Courbes qu'on leur fera décrire, ſeront toutes ſur des ſurfaces mathematiques horizontales, leſquelles rendent ces corps comme ſans péſanteur, en ſoûtenant ce qu'ils en ont.

PROBLÊME.

Trouver la raport des Forces centrales (tant centrifuges que centripetes) aux Péſanteurs abſoluës des Corps mûs de viteſſes variées à diſcrétion le long de telles Courbes qu'on voudra.

So-

SOLUTION.

* I. Soit une Courbe quelconque *MLN* décrite par le corps *L* mû ſuivant *MLN* avec telle variation de viteſſes qu'on voudra, en tendant toûjours vers un point quelconque *C* du plan de cette Courbe, ou directement à contreſens: On demande le raport de la péſanteur abſolue de ce corps, avec ce qu'il fait d'effort à chaque point *L* de cette Courbe pour s'en écarter en ſuivant la tangente *LQ*, ou (ce qui revient au même) avec les forces qui égales à ces efforts, le retiennent toûjours ſur cette Courbe, en l'attirant ou en le repouſſant inceſſamment & directement contr'eux ſuivant *LC*. Le point *C* s'appellera le *Centre* de ces forces; & les droites *LC*, *lC*, &c. leurs *Rayons*.

Soit l'arc *Ll* indéfiniment petit, des extrémitez duquel partent les rayons *LC*, *lC*, avec la petite droite *lP* parallele à *LC*, & qui rencontre en *P* la tangente *LQ*. Soit de plus *HL* la hauteur de laquelle le corps *L* tombant par ſa péſanteur, il aquieroit en *L* en vertu de cette ſeule péſanteur, la viteſſe qu'il a effectivement en ce point ſuivant *Ll*, ou pour ſuivre *LP*: Cette hauteur s'appellera dans la ſuite *Déterminatrice* de cette viteſſe, pour n'être pas obligé de répéter cette grande phraſe toutes les fois qu'on en parlera.

† II. Cela poſé, il eſt viſible que ſi l'on prend la tangente *LQ* double de la verticale *HL*, & qu'on imagine le corps *L* ſe mouvoir uniformé-

* *Conſtruction & définitions.* FIGUR. I.

† *Expreſſion des temps requis au corps* Décrivant *pour acquerir en tombant la viteſſe qu'il a le long de chaque élément de la Courbe qu'il décrit, & pour parcourir cet élément de cette même viteſſe.*

mément de cette viteſſe ſuivant LQ; non ſeulement il parcourra cette longueur LQ dans un temps égal à celui qu'il auroit mis à tomber de H en L, en commençant en H; mais encore ſi l'on prend la partie indéfiniment petite LP de cette tangente pour le temps qu'il mettroit à parcourir de cette même viteſſe cet élément LP, c'eſt à dire (*hyp.*) pour le temps qu'il met à parcourir effectivement Ll, l'on aura auſſi LQ pour celui qu'il employeroit à parcourir ainſi cette même LQ, ou à tomber de H en L par ſa ſeule péſanteur.

* III. Cela étant, ſi l'on ſuppoſe que la force centrifuge ou centripete (qui feroit parcourir lP au corps L dans le temps qu'abandonné à lui-même il parcourroit LP, ou que retenu ſur la Courbe il parcourt effectivement l'élément Ll) agit inceſſamment, & uniformément ſur le corps L ſuivant Pl, de même que la péſanteur fait de haut en bas dans l'hypothêſe de *Galilée*; on verra que puiſque cette force centrale en L, eſt capable de lui faire parcourir Pl dans le temps LP; ſi l'on fait cette analogie $\overline{LP}^2 . \overline{LQ}^2 :: Pl . \frac{\overline{LQ}^2 \times Pl}{\overline{LP}^2}$. Ce quatriéme terme ſera l'eſpace que cette force centrale inhérente comme une eſpece de péſanteur dans le corps L, lui feroit parcourir dans le temps LQ que ſa péſanteur (*art.* 2.) le fait tomber de même de H

* *Expreſſion de l'eſpace que le corps* Décrivant *parcourroit en vertu de ſa force centrale conſtante pendant un temps égal à celui qu'il lui faudroit pour acquerir en tombant en vertu de ſa péſanteur une viteſſe égale à ce qu'il en a au point de la courbe où il a cette force centrale.*

H en *L*; puiſqu'alors les eſpaces ſeroient comme les quarrez des temps.

* IV. Donc HL & $\frac{\overline{LQ}^2 \times Pl}{\overline{LP}^2}$ ſont les eſpaces que la péſanteur du corps *L*, & ſa force centrale en *L* ſuivant *LC*, lui feroient parcourir de la même maniére en temps égaux. Par conſéquent ces deux forces doivent être entr'elles comme ces eſpaces: c'eſt à dire que ſi l'on prend *p* pour la péſanteur de ce corps, & *f* pour ſa force centrale en *L* par raport au centre *C*, l'on aura $f.\ p :: \frac{\overline{LQ}^2 \times Pl}{\overline{LP}^2}.\ HL$ (à cauſe que ſuivant l'art. 2. LQ eſt $= 2\ HL$, & $LP = Ll$) :: $\frac{\overline{4HL}^2 \times Pl}{\overline{Ll}^2}.\ HL$. Ce qui donne $f = \frac{4p \times HL \times Pl}{Ll \times Ll}$ (en prenant auſſi *h* pour *HL*) $= \frac{4ph \times Pl}{Ll \times Ll}$ pour une Regle générale de comparaiſon entre les forces centrales & les péſanteurs des corps. *Ce qu'il falloit trouver.*

† V. *Autrement.* Puiſqu'on ſuppoſe (*art.* 1.) l'élément *Ll* de la Courbe *MLN*, parcouru d'une viteſſe égale à ce que le corps *L* qui la décrit, en auroit aquis en *L* en vertu de ſa chute de *H* en *L*, & que d'ailleurs ce corps mû de cette viteſſe uniforme parcourroit le double de *HL* dans le temps de cette chute; ce temps de ſa chute de *H* en *L*, ſera au temps qu'il met à parcourir *Ll* :: $2HL.\ Ll$. Donc en appellant

* *Regle de comparaiſon des forces centrales avec les péſanteurs des Corps.*

† *Autre maniere de démontrer la même Regle.*

dt la durée de l'inſtant que ce corps emploie à parcourir l'élément Ll, l'on aura $\frac{2HL \times dt}{Ll}$ pour le temps de ſa chute faite de H en L en vertu de ſa ſeule péſanteur. Par conſéquent les eſpaces ainſi parcourus en vertu des forces conſtantes & inceſſamment appliquées, telles qu'on ſuppoſe d'ordinaire la péſanteur, & que toute force centrale l'eſt à chaque inſtant, étant en raiſon compoſée de ces forces & des quarrez des temps emploiez à parcourir ces eſpaces; l'on aura auſſi (en prenant encore f pour la force centrale du corps L ſuivant Pl ou LC, & p pour ſa péſanteur) $Pl.HL :: fdt^2.\ p \times \frac{4HL^2 dt^2}{Ll^2}$.

Ce qui donnera encore $f = \frac{4p \times HL \times Pl}{Ll \times Ll}$ (en prenant auſſi h pour HL) $= \frac{4ph \times Pl}{Ll \times Ll}$, ainſi qu'on le vient de trouver dans l'art. 4.

* VI. *Autrement encore.* Toutes choſes demeurant les mêmes que dans l'art. 2. ſi l'on prend $H\lambda$ pour ce que le corps tombant de H parcourroit de la hauteur HL en vertu de ſa ſeule péſanteur dans l'inſtant que ſa force centrale lui fait faire Pl; cette force centrale (f) ſe trouvera pour lors être à la péſanteur (p) de ce corps :: $Pl.\ H\lambda$. Mais ce temps par Pl, ou par $H\lambda$, étant (*art.* 2.) à celui de la chute de H en L :: $LP\ (Ll).\ LQ\ (2HL)$. L'on aura de plus $H\lambda.\ HL :: Ll \times Ll.\ 4HL \times HL$. ou $H\lambda = \frac{Ll \times Ll}{4HL}$. Donc on aura auſſi pour lors $f.\ p :: Pl.\ \frac{Ll \times Ll}{4HL}$. Ce qui donne

* *Troiſiéme maniére de démontrer la même Regle.*

donne encore $f = \frac{4\varphi \times HL \times Pl}{Ll \times Ll} = \frac{4ph \times Pl}{Ll \times Ll}$, comme dans les art. 4. & 5.

* VII. *Autrement encore.* Dans la Remarque des Memoires de 1700. pag. 303. en ſuppoſant les Courbes MLN, ZEY, décrites par deux corps L, E, dont les maſſes étoient m, μ; leurs forces centrales f, φ, vers C, D; les longueurs parcourues en vertu de ces forces à chaque inſtant, étoient Pl, Fe, paralleles à LC, ED; enfin ces inſtans étoient dt, $d\theta$: Cela (dis-je) ſuppoſé dans cette Remarque, on y a conclu de la page 111. des Mem. de 1693. cette Regle générale $Pl \times m\varphi d\theta^2 = Fe \times \mu f dt^2$, ou $\frac{fdt^2}{m \times Pl} = \frac{\varphi d\theta^2}{\mu \times Fe}$, laquelle ſera encore démontrée ci-après dans l'art. 10.

† VIII. Soit préſentement p la véritable péſanteur du corps E, telle qu'on la ſuppoſe d'ordinaire dans l'hypotheſe de *Galilée*, & h une hauteur finie que ce corps parcoure en vertu de cette péſanteur dans un temps quelconque θ, au lieu de tourner autour du point D ſur la Courbe ZEY, comme ci-deſſus art. 7. Il eſt viſible qu'en ſubſtituant p au lieu de φ; h au lieu de Fe, & θ^2 au lieu de $d\theta^2$, dans la derniére équation de cet art. 7. l'on aura ici $\frac{fdt^2}{m \times Pl} = \frac{p\theta^2}{\mu h}$.

Mais ſi l'on ſuppoſe que la viteſſe inſtantanée, & par conſéquent uniforme pendant ſon inſtant, avec laquelle l'élément Ll eſt parcouru

* *Quatriéme maniere de démontrer la même Regle par une autre des Mem. de* 1700. Fig I. IV. † *Comment la Regle en queſtion ſe déduit de celle des Mem. de* 1700. *rapportée dans le précédent article* 7.

par le corps L, ſoit égale à ce que la péſanteur (p) du corps E en donneroit à ce même corps E à la fin de ſa chute faite de la hauteur quelconque h, & qu'on prenne cet élement Ll pour le temps ou l'inſtant (dt) employé par le corps L à le parcourir : l'on aura auſſi $2h$ pour le temps (θ) employé par le corps E à tomber de la hauteur h; puiſque (ſuivant *Galilée*) dans ce même temps cette même viteſſe aquiſe (*hyp.*) à la fin de la chute de ce corps, faite de la hauteur h, demeurant uniforme, lui feroit parcourir le double de h ; & que d'ailleurs on ſait que les temps ſont toûjours comme les eſpaces parcourus avec des viteſſes uniformes & égales.

Donc en ſubſtituant $2h$ pour θ, ou $4hh$ pour θ^2, & $\overline{Ll}^2$ pour dt^2, dans l'équation $\frac{fdt^2}{mx\ Pl} = \frac{p\theta^2}{\mu h}$ trouvée au commencement de cet article-ci, l'on aura encore ici $\frac{fx\ \overline{Ll}^2}{mx\ Pl} = \frac{4ph}{\mu}$. Par conſéquent en ſuppoſant le corps L égal au corps E, c'eſt à dire $m = \mu$, & ſa péſanteur auſſi $= p$, l'on aura de même $\frac{fx\ \overline{Ll}^2}{Pl} = 4ph$ par raport au ſeul corps L, ou bien encore $f = \frac{4phx\ Pl}{Llx\ \overline{Ll}}$, comme dans les art. 4, 5, & 6.

* IX. Il eſt ici à remarquer qu'en regardant (ainſi qu'on l'a fait par tout ci-deſſus) Pl comme parcourue d'un mouvement acceleré pendant

* *Introduction du rayon oſculateur dans la précédente Regle de comparaiſon des forces centrales avec les péſanteurs des corps, en conſiderant les élémens des Courbes que ces corps décrivent, comme Courbes eux-memes.* FIG. I.

dant que LP eſt parcourue d'un mouvement uniforme, l'élément Ll décrit par le concours de ces deux mouvemens, doit être ici regardé comme courbe, & comme un véritable arc dans lequel la Courbe MLN eſt baiſée par ſon cercle oſculateur en cet endroit; & par conſéquent comme un véritable arc de ce cercle, & non comme un côté droit de Polygone, ainſi qu'on le ſuppoſe d'ordinaire, & qu'on l'a ſuppoſé juſqu'ici dans la recherche des Rayons des Développées. Donc en prenant R pour le centre de ce cercle oſculateur en Ll; LR pour celui de ſes rayons qui eſt perpendiculaire à la touchante en L; & Rl pour un autre de ſes rayons infiniment près de celui-là, & qui prolongé rencontre en E cette même touchante LQ; la Prop. 36. du Liv. 3. d'*Euclide* donnera $LE \times LE = El \times \overline{ER + lR} = 2LR \times El$, ou $El = \frac{LE \times LE}{2LR} = \frac{Ll \times Ll}{2LR}$.

Or en faiſant lF perpendiculaire en F ſur la tangente LQ, & LD perpendiculaire en D ſur l'ordonnée Cl, laquelle prolongée rencontre en S cette même tangente LQ; les triangles rectilignes ſemblables EFl, ELR, & SPl, SLC, donneront $El. Fl :: ER. LR$. Et $Sl. Pl :: SC. LC$. Et par conſéquent auſſi $El = Fl$, & $Sl = Pl$, à cauſe que l'arc indéfiniment petit Ll rend $ER = LR$, & $SC = LC$. De plus les triangles rectilignes ſemblables SFl, SDL, donneront pareillement LS ou $Ll. LD :: Sl$ ou $Pl. lF$ ou $El = \frac{LD \times Pl}{Ll}$.

Donc aiant déja $El = \frac{Ll \times Ll}{2LR}$, l'on aura enfin $\frac{LD \times Pl}{Ll}$.

$\frac{LD \times Pl}{Ll} = \frac{Ll \times Ll}{2LR}$, ou $Pl = \frac{Ll \times Ll \times Ll}{2LR \times LD}$. Donc auſſi en ſubſtituant cette valeur de Pl dans la formule générale $f = \frac{4ph \times Pl}{Ll \times Ll}$ des art. 4, 5, 6, & 8, l'on aura $f = \frac{2ph \times Ll}{LR \times LD}$. De ſorte que ſi préſentement on appelle LR, r; Ll, ds; & LD, dx; l'on aura de même en général $f = \frac{2phds}{rdx}$ pour la Regle de comparaiſon des Forces centrales avec les péſanteurs des corps. *Ce qu'il falloit trouver.*

SCHOLIE.

* X. Afin de n'être pas obligé de recourir aux Mémoires de 1700. ni de 1693. qu'ils ſuppoſent pour la preuve de la Regle de l'art. 7. où l'on vient de les citer, voici encore une autre démonſtration de cette Regle.

† Toutes choſes demeurant les mêmes que ci-deſſus art. 8. ſoient de plus les Courbes *GHI*, *OVW*, décrites par les corps *H*, *V*, mûs ſuivant *Hh*, *Vu*, en tendant toûjours aux centres *A*, *B*, avec des forces leſquelles les empêchent de ſuivre les tangentes *HK*, *VT*, en les retirant ou repouſſant inceſſamment vers ces Courbes, de maniére à leur faire porcourir *Kh*, *Tu*, paralleles à *AH*, *BV*, dans les inſtans qu'ils parcourent effectivement les élémens *Hh*, *Vu*, de ces mêmes Courbes. Tout le reſte demeurant comme on le voit dans les Figures 1, 2, 3, 4. ſoient donc

Les

* *Démonſtration de la Regle des Memoires de 1700. raportée ci-deſſus art. 7.* † FIG. I. II. III. IV.

Les corps mûs en lignes courbes... L, H, V, E.

Les quantitez dont ils s'approchent de ces Courbes en s'éloignant de leurs tangentes à chaque instant . . . . . Pl, Kb, Tu, Fe.

Ces mêmes instans . . . . $dt, dt, d\theta, d\theta$.

Les Forces centrales en vertu desquelles se font ces approches instantanées . . . . . $f, \varphi, \varphi, \varphi$,

Les masses de ces corps . . . m, m, m, μ.

Ces noms supposez, l'on aura $\begin{cases} Pl.Kb :: f\varphi. \\ Kb.Tu :: dt^2 d\theta^2. \\ Tu.Fe :: \mu.m. \end{cases}$

Donc en multipliant ces trois analogies par ordre, l'on aura aussi $Pl.Fe :: \mu f dt^2 . m\varphi d\theta^2$. Et par conséquent $Pl \times m\varphi d\theta^2 = Fe \times \mu f dt^2$, ou $\frac{f dt^2}{m \times Pl} = \frac{\varphi d\theta^2}{\mu \times Fe}$, ainsi que dans l'art. 7.

On ne s'arrêtera point ici aux Corollaires qu'on pourroit tirer de cette Regle, ne s'agissant ici que de celle qu'on vient de trouver dans l'art. 9. En voici encore deux Démonstrations différentes dans lee deux Solutions suivantes.

AUTRE SOLUTION.

* XI. Toutes choses demeurant les mêmes que dans les art. 4, & 9. les triangles rectilignes semblables RLE, lFE, donneront $RL.RE :: lF.lE$. De sorte que l'angle (*hyp.*) infiniment petit LRE rendant $RL = RE$, l'on aura pareillement $lF = lE$. Donc la nature du cercle osculateur en Ll, comme de tout autre, don-

* *Regle de comparaison des forces centrales entr'elles.*

donnant $lE = \frac{LE \times LE}{ER + Rl} = \frac{Ll \times Ll}{2RL}$, l'on aura de même $lF = \frac{Ll \times Ll}{2RL}$ (*art.* 9.) $= \frac{ds^2}{2r}$. Donc les triangles rectilignes ſemblables SDL, SFl, donneront auſſi SL ou lL (ds). DL (dx) :: Sl. Fl :: f (force ſuivant SC ou LC). $\frac{fdx}{ds}$ (force ſuivant Fl). De ſorte que l'eſpace Fl $\left(\frac{ds^2}{2r}\right)$ eſt ce qu'il y en a de parcouru en vertu de cette force $\left(\frac{fdx}{ds}\right)$ pendant l'inſtant dt que le corps L décrit l'arc élémentaire Ll au lieu de ſuivre la tangente LQ, comme il auroit fait ſans cette force ou ſans f. Donc cette force inſtantanée $\left(\frac{fdx}{ds}\right)$ lui aiant été continuellement appliquée pendant ce temps dt, & d'ailleurs étant conſtant (*art.* 10.) que des eſpaces ainſi parcourus par un même corps en vertu de forces toûjours les mêmes le long de chacun de ces eſpaces, & toûjours appliquées (ainſi qu'on le penſe ordinairement de la péſanteur), ſont comme les produits de ces forces par les quarrez des temps de leur application non interrompue; l'on aura déja $\frac{ds^2}{2r} = \frac{fdx}{ds} \times dt^2$, ou $f =$

$= \frac{ds^3}{2rdxdt^2}$ pour une Regle générale du raport des forces centrales entr'elles, tendantes vers C ou directement à contre-ſens, quelque variées qu'elles ſoient ſur une même Courbe quelconque MLN, en conſéquence de la variété des viteſſes avec leſquelles cette Courbe peut être décrite par un même corps.

* XII. *Autrement.* Soient de plus les ordonnées CL, Cl, &c. appellées y ; & par conſéquent $Dl = dy$. Les triangles rectilignes ſemblables SDL, SFl, donneront ici LD (dx). SD ou lD $(dy) :: lF \left(\frac{ds^2}{2r}\right)$. $SF = \frac{dyds^2}{2rdx}$. Et SL ou lL (ds). SD ou lD $(dy) :: Sl$. $SF :: f$ (force ſuivant SC ou LC). $\frac{fdy}{ds}$ (force ſuivant SF). Donc on aura encore (comme ci-deſſus art. 11.) $\frac{dyds^2}{2rdx} = \frac{fdy}{ds} \times dt^2$, ou $f = \frac{ds^3}{2rdxdt^2}$, c'eſt à dire, encore la même Regle que dans le précédent art. 11.

† XIII. *Autrement encore.* Les triangles rectilignes ſemblables SDL, SFl, donneront auſſi DL (dx). SL ou Ll $(ds) :: Fl \left(\frac{ds^2}{2r}\right)$. $Sl = \frac{ds^3}{2rdx}$. Donc on aura encore (comme ci-deſſus art. 11.) $\frac{ds^3}{2rdx} = fdt^2$, ou $f = \frac{ds^3}{2rdxdt^2}$, c'eſt à dire, encore la même Regle que dans les deux derniers art. 11, & 12.

‡ XIV. Concevons préſentement comme dans la premiere Solution, art. 1, 2, & 3. que HL eſt une hauteur d'où le corps L tombant, il aquieroit en L une viteſſe égale à ce que ſa rotation ſuivant MLN lui en donne en L ſuivant LQ. Cela étant, ſi l'on ſuppoſe auſſi LQ double

* *Autre démonſtration de la même Regle.* † *Troiſiéme démonſtration de la même Regle.* ‡ *Regle de comparaiſon des forces centrales avec les peſanteurs des corps, tirée de la précédente en conſiderant encore les élémens des Courbes que ces corps décrivent, comme Courbes eux-mêmes.*

ble de HL, non-ſeulement cette viteſſe demeurant uniforme pourroit porter ce corps de L en Q ſuivant LQ, dans le temps qu'il auroit mis à tomber de H en L en vertu de ſa ſeule péſanteur; mais encore ce temps ſeroit à ce qu'il en auroit mis à parcourir LF ou LS de cette même viteſſe uniforme, c'eſt à dire, à ce qu'il en met à parcourir effectivement Ll, comme LQ eſt à LF ou LS ou Ll: de ſorte qu'en prenant LQ pour le temps que le corps L mettroit à tomber de H en L, l'on aura auſſi Ll pour l'inſtant qu'il employe à parcourir cet élément de la Courbe MLN qu'on le ſuppoſe décrire. Donc ſi l'on prend cet inſtant pour le premier de ſa chute, pendant lequel il parcoure $H\lambda$, l'on aura $\overline{LQ}^2 . \overline{Ll}^2 :: HL . H\lambda = \frac{HL \times \overline{Ll}^2}{\overline{LQ}^2}$ (à cauſe qu'on ſuppoſe ici $Ll = ds$, & $LQ = 2HL = 2b$) $= \frac{ds^2}{4b}$.

Mais cet inſtant que le corps L emploie à parcourir Ll, eſt auſſi celui que ſes forces (*art.* 11, 12, 13.) $\frac{fdx}{ds}$, $\frac{fdy}{ds}$, f, emploient à lui faire parcourir Fl, SF, Sl, d'un mouvement accéléré à la maniére de celui que ſa péſanteur lui donneroit de H en λ pendant ce même inſtant. Donc ſa péſanteur (appellée p) eſt à chacune de ces forces, comme $H\lambda$ $\left(\frac{ds^2}{4b}\right)$ eſt à chacune des longueurs Fl $\left(\frac{ds^2}{2r}\right)$, SF $\left(\frac{dyds^2}{2rdx}\right)$, Sl $\left(\frac{ds^3}{2rdx}\right)$, qui leur répondent dans les art. 11, 12, 13. c'eſt à dire,

I°.

$1^{\circ}.\ p.\ \frac{fdx}{ds} :: H\lambda\left(\frac{ds^2}{4b}\right).\ Fl\left(\frac{ds^2}{2r}\right).$

$2^{\circ}.\ p.\ \frac{fd\bar{y}}{ds} :: H\lambda\left(\frac{ds^2}{4b}\right).\ SF\left(\frac{d\bar{y}ds^2}{2rdx}\right).$

$3^{\circ}.\ p.\ f :: H\lambda\left(\frac{ds^2}{4b}\right).\ Sl\left(\frac{ds^3}{2rdx}\right).$

Et toutes ces Analogies donnent également chacune $f = \frac{2hpds}{rdx}$, qui eſt la même Regle de comparaiſon des forces centrales des corps avec leurs péſanteurs, qu'on a déja trouvé dans la Solut. 1. art. 9. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

SCHOLIE.

* XV. On voit dans cette ſeconde Solution, non-ſeulement (*art.* 14.) le raport de la péſanteur d'un corps quelconque aux forces centrales qu'il auroit ſur une Courbe auſſi quelconque qu'il décriroit de telle viteſſe qu'on voudroit, c'eſt-à-dire, uniforme ou variée à diſcrétion, en tendant toûjours vers un même point (quel qu'il fût) du plan de cette Courbe; mais encore (*art.* 11, 12, 13.) le raport de ces mêmes forces entr'elles, lequel s'exprimant ici par $f = \frac{ds^3}{2rdxds^2}$, marque que ces forces centrales (f) doivent toûjours être entr'elles comme les fractions correſpondantes $\frac{ds^3}{rdxds^2}$; ce qui s'accorde avec

* *Identité de la précédente Regle de comparaiſon des forces centrales entr'elles, trouvée dans les art.* 11, 12, *&* 13. *avec celle qui ſe trouve pour le même ſujet dans les Memoires de* 1701.

avec la Regle $f = \frac{ds^3}{rdxdt^2}$ que j'ai donnée de ce dernier raport dans les Mem. de 1701. pag. 27. & 28. où l'on appelloit n, y, dz, ce que l'on appelle ici f, r, dx. Le ſigne d'égalité dans les choſes diſparates & hétérogenes (telles que ſont ces forces & les grandeurs qui les expriment ici) ne ſignifiant que des égalitez de raports. De ſorte que $f = \frac{mds^3}{rdxdt^2}$ ne ſignifie autre choſe non plus, ſinon que le raport des forces centrales f entr'elles, eſt toûjours le même que celui qui ſe trouve entre les fractions correſpondantes $\frac{ds^3}{rdxdt^2}$, quelque nombre (entier ou rompu, &c.) ou quelqu'autre grandeur conſtante que m puiſſe ſignifier : ſoit que m ſignifie l'unité, comme dans la formule $f = \frac{ds^3}{rdxdt^2}$ de 1701. ou qu'elle ſignifie un demi, comme dans la formule $f = \frac{ds^3}{2rdxdt^2}$ des articles 11, 12, 13. ſans qu'il s'enſuive $\frac{ds^3}{rdxdt^2} = \frac{ds^3}{2rdxdt^2}$, ou $1 = \frac{1}{2}$, quoique la force f ſoit ici la même de part & d'autre ; parceque ce ne ſeroient plus ici des égalitez de raports, mais de grandeurs homogenes entr'elles. Auſſi cette expreſſion $f = \frac{mds^3}{rdxdt^2}$ du raport des forces centrales entr'elles, ſe trouvera-t-elle comme les précédentes $f = \frac{ds^3}{rdxdt^2}$, $f = \frac{ds^3}{2rdxdt^2}$.

Car

Car puiſque les eſpaces $Fl\left(\frac{ds^2}{2r}\right)$ parcourus (*art.* 11.) en vertu des forces inſtantanées $\frac{fdx}{ds}$, continuellement appliquées chacune ſuivant le ſien, & toûjours les mêmes chacune pendant l'inſtant dt de ſon application non interrompuë, ſont entr'eux (*art.* 10.) comme les produits $\frac{fdx}{ds} \times dt^2$ de chacune de ces forces par le quarré de ſon inſtant; & que d'ailleurs ces eſpaces $\frac{ds^2}{2r}$ ſont auſſi entr'eux comme leurs produits $\frac{mds^2}{r}$ par quelque grandeur conſtante $2m$ que ce ſoit; l'on aura auſſi ces produits $\frac{mds^2}{r}$ en même raiſon que les autres $\frac{fdx}{ds} \times dt^2$: ce qui donnera $\frac{mds^2}{r} = \frac{fdx}{ds} \times dt^2$, ou $f = \frac{mds^3}{rdxdt^2}$, par la même raiſon qu'on a trouvé ci-deſſus (*art.* 11.) $\frac{ds^2}{2r} = \frac{fdx}{ds} \times dt^2$, ou $f = \frac{ds^3}{2rdxdt}$, & dans les Mem. de 1701. $\frac{ds^2}{r} = \frac{fdx}{ds} \times dt^2$, ou $f = \frac{ds^3}{rdxdt^2}$; tout cela ne ſignifiant autre choſe ſinon que les forces centrales f tendantes ſuivant des lignes qui paſſent toutes par un point quelconque du plan de quelque Courbe que ce ſoit, décrite avec telle variation de viteſſe qu'on voudra, ſeront par tout entr'elles comme les fractions correſpondantes $\frac{ds^3}{rdxdt^2}$, ainſi qu'on le vient de dire, &

& qu'on l'avoit déja dit dans les Mem. de 1701.

* XVI. La ſeconde Solution précédente ſe peut encore trouver ſans toucher à ce raport des forces centrales entr'elles, en reprenant ſeulement ici quelque choſe de ce qui y a conduit dans l'art. 12. Et comme il y a peu de choſe à répéter de cet article, nous l'allons faire pour rendre ici cette Solution complette, en appliquant ſeulement l'art. 14. à ce que nous allons démontrer, comme il ſe trouve appliqué à l'art. 12.

Toutes choſes demeurant donc encore les mêmes que dans les art. 4. & 9. les triangles rectilignes ſemblables RLE, lFE, donneront $RL.\ RE :: lF.\ lE$. De ſorte que l'angle (*hyp.*) infiniment petit LRE rendant $RL = RE$, l'on aura pareillement $lF = lE$. Donc le cercle oſculateur de la Courbe MLN en ſon élément Ll pris, non comme un côté droit de polygone, mais comme un véritable arc de cercle, donnant (par ſa nature de cercle) $lE = \frac{LE \times LE}{ER + Rl} = \frac{Ll \times Ll}{2RL}$, l'on aura de même $lF = \frac{Ll \times Ll}{2RL}$ (*art.* 9.) $= \frac{ds^2}{2r}$.

De plus les triangles rectilignes ſemblables SDL, SFL, donneront auſſi DL (dx). SD ou lD (dy) :: $Fl\left(\frac{ds^2}{2r}\right)$. $SF = \frac{dyds^2}{2rdx}$. Et SL ou Ll (ds). SD ou lD (dy) :: $Sl.\ SF :: f$ (force ſuivant SC ou LC). $\frac{fdy}{ds}$ (force ſuivant SF).

Ajoû-

* *Solution de l'art. 14. ſans toucher au rapport des forces centrales entr'elles.*

Ajoûtez à ceci l'art. 14. & il en réſultera, comme de l'art. 12. la formule $f = \frac{2hpds}{rdx}$ trouvée dans ce même art. 14. & dans l'art. 9.

Cet art. 16. *n'eſt que pour faire ſentir comment on auroit pû ſe paſſer de la Regle des forces centrales entr'elles, pour trouver les trois Solutions de l'art.* 14. *Ce qu'on vient de dire de la ſeconde, ſe dira de même de la premiére & de la troiſiéme, en ſe ſervant des art.* 11. & 13. *comme l'on vient de faire de l'art.* 12.

TROISIE'ME SOLUTION.

* XVII. Juſqu'ici nous avons regardé la force centrale du corps L en chaque point L de la Courbe MLN qu'on le ſuppoſe décrire de telle viteſſe qu'on voudra, comme une eſpece de péſanteur ou de force conſtante tendante vers C, laquelle agiſſant inceſſamment ſur ce corps, lui feroit parcourir d'un mouvement arithmetiquement accéléré le côté LK du parallelogramme PK, ou ſon oppoſé Pl, pendant l'inſtant que libre en L, ſa viteſſe de rotation en ce point L ſuivant LQ, lui feroit parcourir d'un mouvement uniforme la partie infiniment petite LP de cette tangente; & le mouvement réſultant de ces deux-là ſuivant l'élément Ll, devant ſe faire en ligne courbe, nous avons été obligez de regarder cet élément & les autres de la Courbe MLN, comme véritablement courbes en ces endroits, & la tangente ILQ au

* *Démonſtration de la même Regle de comparaiſon des forces centrales avec les péſanteurs des corps, tirée préſentement de la conſideration des Courbes ſous la forme de polygones infiniti-lateres rectilignes.* FIG. V.

ſeul point L, comme celle ſuivant laquelle la viteſſe de rotation du corps L tend à l'emporter.

Mais ſi l'on veut regarder cette Courbe MLN comme un polygone infiniti-latere, dont les élémens ML, Ll, &c. ſoient autant de petits côtez droits les plus petits qui ſe puiſſent ſuppoſer; en ce cas le petit côté ML prolongé vers T, devenant la tangente ſuivant laquelle la viteſſe de rotation en L du corps *décrivant*, tend à l'emporter d'un mouvement uniforme; il lui faut ſuppoſer encore une autre force ſuivant LC, capable de lui faire parcourir auſſi d'un mouvement uniforme le côté LG du parallelogramme ΥG, ou ſon oppoſé Υl, pendant le même inſtant que ſa viteſſe de rotation emploieroit à lui faire parcourir $L\Upsilon$, ou qu'il emploie effectivement à parcourir Ll. Or ſi l'on conſidére que la viteſſe précédente (*Solut.* 1. & 2.) de ce corps L, accélérée de P en l à la maniére de celle des chutes des corps péſans, devroit lui donner en l une viteſſe qui uniforme ſeroit capable de lui faire parcourir Υl double de Pl, dans un inſtant égal à celui qu'il auroit mis à tomber (pour ainſi dire) de P en l en vertu de ſa ſeule force centrale regardée comme une eſpece de péſanteur tendante en C, ou qu'il a effectivement mis à parcourir Ll; on verra que du concours de cette viteſſe uniforme en L ſuivant LG, avec celle de rotation ſuivant $L\Upsilon$, ce corps non ſeulement parcourroit la diagonale Ll du parallelogramme ΥG pendant ce même inſtant; mais auſſi qu'il arriveroit en l avec la même viteſſe que s'il y arrivoit (comme ci-deſſus Solut. 1. & 2.) par le concours de ſa viteſſe de rotation ſuivant LQ, avec

la

la précédente viteſſe accélérée de P en l. Donc ce corps L décrira l'élément Ll dans des inſtans égaux, & avec une même viteſſe en l, ſoit qu'il le décrive par le concours de cette viteſſe accélérée de P en l avec ſa viteſſe uniforme de rotation ſuivant LQ, ou qu'il le décrive par le concours de cette viteſſe uniforme ſuivant LT avec une autre pareillement uniforme ſuivant LG ou Υl, égale à l'aquiſe en l par cette accélération. Donc auſſi les deux côtez $L\Upsilon$, LG, du parallelogramme ΥG, ſont entr'eux comme ces deux viteſſes uniformes, ou (ce qui revient au même) comme les forces productrices de ces viteſſes : c'eſt à dire que $L\Upsilon$ eſt à LG, comme la force acquiſe en L par la chute de H en L du corps L en vertu de ſa ſeule péſanteur, eſt à ſa force acquiſe en l par une ſemblable chute de P en l en vertu de ſa ſeule force centrale.

* XVIII. Or il eſt manifeſte que la peſanteur d'un corps agiſſant également ſur lui dans tous les inſtans de ſa chute, & tous ces efforts égaux chacun à ſa péſanteur, ſe conſervant & s'accumulant (pour ainſi dire) dans toute la durée de ſa chute, leur nombre à chaque inſtant doit être comme le nombre des inſtans écoulez depuis le commencement de cette même chute juſqu'à cet inſtant; & par conſéquent leur ſomme, c'eſt à dire, la force aquiſe de ce corps à chaque inſtant doit être égale au produit de ſa péſanteur par le nombre de ces inſtans, ou par la durée de ſa chute juſqu'à ce même inſtant.

On ſait auſſi que la force totale de ce corps en L, aquiſe par ſa chute de H en L en vertu de ſa ſeule péſanteur, ſeroit ſeule capable de

* *Continuation de la même demonſtration.*

lui faire parcourir LT double de HL d'une viteſſe uniforme égale à ce qu'il en auroit aquis en L en vertu de ſa chute, & dans un temps égal à celui de cette chute de H en L. Donc la force totale de ce corps à la fin de ſa chute en L en vertu de ſa ſeule péſanteur, eſt égale au produit de ſa peſanteur par le temps qu'il emploieroit à parcourir LT double de HL d'une viteſſe uniforme égale à ce qu'il en auroit ainſi aquis en L, c'eſt à dire (*hyp.*) égale à ſa viteſſe de rotation en L.

On prouvera de même que la force de ce corps aquiſe en l par ſon eſpece de chute de P en l en vertu de ſa ſeule force centrale, doit auſſi être égale au produit de cette force centrale par le temps qu'elle emploieroit à le faire ainſi tomber de P en l, ou (*hyp*) que ſa viteſſe uniforme de rotation emploieroit à lui faire parcourir LP ou $L\Upsilon$.

Donc en prenant les longueurs LT, $L\Upsilon$, pour les temps que le corps L emploieroit à les parcourir de cette viteſſe uniforme de rotation; p, pour la péſanteur de ce corps; & f, pour ſa force centrale en L ſuivant LC; l'on aura $p \times LT$ pour la force totale de ce corps aquiſe en L par ſa chute de H en L en vertu de ſa ſeule péſanteur; & $f \times L\Upsilon$ pour ſa force totale pareillement aquiſe en l par une ſemblable chute de P en l en vertu de ſa ſeule force centrale. Donc auſſi (*art.* 17.) $L\Upsilon . LG :: p \times LT . f \times L\Upsilon$. ou $f = \frac{p \times LT \times LG}{L\Upsilon \times L\Upsilon}$ (à cauſe qu'on ſuppoſe ici $LT = 2\,HL$, & $LG = \Upsilon l$) $= \frac{2p \times HL \times \Upsilon l}{L\Upsilon \times L\Upsilon} = \frac{2p \times HL \times \Upsilon l}{Ll \times Ll}$.

* XIX. Cela étant, ſi l'on prend (comme l'on

* *Concluſion.*

l'on vient de faire art. 17.) la Courbe *MLN* pour un polygone infiniti-latere, dont *RL*, *Rl*, ſoient deux rayons de ſa Dévelopée, & que *lZ* ſoit un arc de cercle décrit du centre *L*; la reſſemblance des triangles *LRl*, *lLZ*, donnera $RL.Ll::Ll.lZ=\frac{Ll\times Ll}{RL}$. Et ſi l'on prolonge *Cl* juſqu'à la rencontre en *X* de la tangente *LT*, la reſſemblance des triangles *XDL*, *XZl*, donnera auſſi *DL*. *LX* ou $Ll::Zl\left(\frac{Ll\times Ll}{RL}\right).\ Xl=\frac{Ll\times Ll\times Ll}{RL\times DL}$. Mais les triangles *XYl*, *XLC*, que *Yl* (*hyp.*) parallele à *LC*, rend ſemblables, donnant *Xl*. *Yl*:: *XC*. *LC*. Et l'angle *XCL* (*hyp.*) infiniment petit, rendant de plus *XC* = *LC*; l'on aura pareillement *Xl*=*Yl*. Donc auſſi $Yl=\frac{Ll\times Ll\times Ll}{RL\times DL}$. Par conſéquent en ſubſtituant cette valeur de *Yl* dans la formule $f=\frac{2p\times HL\times Yl}{Ll\times Ll}$ qu'on vient de trouver à la fin de l'art. 18. l'on aura de même $f=\frac{2p\times HL\times Ll}{RL\times DL}$. Donc en appellant encore *HL*, *h*; *RL*, *r*; *Ll*, *ds*; & *DL*, *dx*; l'on aura encore ici $f=\frac{2phds}{rdx}$ pour Regle générale de comparaiſon des forces centrales avec les peſanteurs des corps, comme dans les art. 9. & 14. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

SCHOLIE.

* XX. Puiſque (*art.* 18.) $f\times LY$ eſt la force

* *Regle générale du raport des forces centrales entr'elles.*

totale du corps L, aquiſe en l par ſa chute (pour ainſi dire) de P en l en vertu de ſa ſeule force centrale f, & que $L\Upsilon$ exprime l'inſtant que cette force centrale emploieroit à lui faire parcourir Υl d'un mouvement uniforme, ou que ce même corps emploie à parcourir effectivement Ll; ſi l'on prend dt pour cet inſtant, l'on aura fdt pour la force qui pourroit lui faire parcourir ainſi Υl d'un mouvement uniforme pendant ce même inſtant; & par tout de même Or on ſait qu'en ce cas le produit fdt^2 d'une telle force fdt par ſon inſtant dt, eſt toûjours proportionel à cette Υl correſpondante. Donc ici $\frac{fdt^2}{\Upsilon l}$ eſt une fraction conſtante égale, par éxemple, à telle grandeur conſtante m qu'on voudra, c'eſt à dire $\frac{fdt^2}{\Upsilon l} = m$; & par conſéquent auſſi $f = \frac{m \times \Upsilon l}{dt^2}$. Mais on vient de trouver (*art.* 19.) $\Upsilon l = \frac{Ll \times Ll \times Ll}{RL \times DL}$. Donc enfin $f = \frac{m \times Ll \times Ll \times Ll}{RL \times DL \times dt^2}$: de ſorte qu'en appellant encore RL, r; DL, dx; & Ll, ds; l'on aura de même $f = \frac{mds^3}{rdxdt^2}$ pour la Regle générale du raport des forces centrales entr'elles, ainſi qu'on l'a déja trouvée ſur la fin de l'art. 15. Ce qui fait voir ici, comme là, que les forces centrales d'un même corps quelconque ſuivant des ordonnées concourantes en quelque point que ce ſoit du plan d'une Courbe auſſi quelconque qu'il décriroit avec telle variation de viteſſes que ce fût, doivent toûjours être entr'elles com-

comme les fractions $\frac{ds^3}{rdxdt^2}$ correſpondantes.

* XXI. Il eſt encore à remarquer que cette même Regle du raport des forces centrales entr'elles, ſe peut encore tirer de celle du raport de ces forces aux péſanteurs des corps qui en ſont affectez, trouvée ci-deſſus art. 9. 14. & 19. Car $2p$ étant conſtant dans cette Regle $f = \frac{2phds}{rdx}$, elle fait déja voir que ſur une même Courbe quelconque décrite par un même corps auſſi quelconque avec telle variété ou variation de viteſſes que ce ſoit, les forces centrales (f) doivent toûjours être entr'elles comme les fractions correſpondantes $\frac{hds}{rdx}$. Mais les hauteurs h d'où ce corps dêvroit tomber pour aquerir à la fin de ſes chutes les mêmes viteſſes qu'il a à chaque point de la Courbe qu'il décrit, étant (ſuivant *Galilée*) comme les quarrez vv de ces viteſſes que j'appelle v; ſi l'on ſubſtitue vv au lieu de h dans la fraction précédente $\frac{hds}{rdx}$, il en réſultera celle-ci $\frac{vvds}{rdx}$ qui ſuivra auſſi toûjours la raiſon de celle-là. Donc les forces centrales (f) ſeront de même ici toûjours entr'elles comme les fractions $\frac{vvds}{rdx}$ correſpondantes. Mais on ſait d'ailleurs que les viteſſes (v) avec chacune deſquelles chaque élément Ll (ds) eſt parcouru pendant chaque inſtant (dt), ſont auſſi toûjours entr'el-

* *La même Regle tirée de celle du raport de ces mêmes forces centrales aux péſanteurs des corps où ces forces ſe trouvent.*

les comme les fractions $\frac{ds}{dt}$ correſpondantes. Donc en ſubſtituant cette fraction dans la preſente à la place de v, on trouvera encore ici les forces centrales (f) en raiſon des fractions, correſpondantes $\frac{ds3}{rdxdt^2}$, ou $\frac{ds3}{2rdxdt^2}$, ou $\frac{mds3}{rdxdt^2}$, ainſi que les donnent les Regles $f = \frac{ds3}{rdxdt^2}$, $f = \frac{ds3}{2rdxdt}$, & $f = \frac{mds3}{rdxdt^2}$, trouvées dans les Mem. de 1701. pag. 27. 28. & ci-deſſus art. 11, 12, 13, 15, & 20. leſquelles ne ſignifient toutes que le même raport de forces centrales entr'elles.

Pour ce qui eſt de la Regle $f = \frac{2phds}{rdx}$ *du raport de ces mêmes forces centrales avec la peſanteur de ce corps, trouvée ci-deſſus dans les art.* 9. 14. 19. *on la trouvera encore de deux autres maniéres ci-après dans les art.* 47. & 56. *En attendant en voici ſeulement quelques Corollaires où ces peſanteurs ſeront priſes à l'ordinaire pour des forces finies.*

COROLLAIRES

De la Regle $f = \frac{2phds}{rdx}$ *trouvée dans les art.* 9, 14, & 19. *Fig.* 1, & 5.

XXII. *Corol.* 1. Il ſuit en général de cette Regle,

* 1°. Que lorſque les forces centrales agiſſent ſui-

* *Premier cas où les forces centrales doivent être infinies par raport aux peſanteurs.* FIG. I. V.

ſuivant des rayons ou des directions qui touchent les Courbes qu'elles font décrire aux corps où elles ſe trouvent ; alors *ds* ſe trouvant infinie par raport à *dx* qui pour lors devient nulle par raport à cet élément *ds* de la Courbe en queſtion, la valeur $\frac{2phds}{rdx}$ de la force centrale (f) du corps qu'on ſuppoſe décrire cette Courbe, devient auſſi infinie par raport à ſa péſanteur, ſoit que le rayon (r) de la Dévelopée de cette même Courbe ſoit fini ou zero, tout le reſte $2ph$ étant (*hyp.*) fini dans cette fraction.

* 2°. Que non-ſeulement en ces points d'attouchement, mais encore par tout où le rayon (r) de la Dévelopée de la Courbe en queſtion ſera zero, les forces centrales (f) du corps qui la décrira, ſeront encore infinies par raport aux péſanteurs ; puiſque leur valeur générale $\frac{2phds}{rdx}$ le ſera toûjours auſſi pour lors, à cauſe que la grandeur $2ph$ y ſera toûjours finie, & que *ds* ne peut jamais être moindre que *dx*.

† 3°. Au contraire ſi le rayon (r) de la dévelopée de la Courbe en queſtion ſe trouvoit infini, la force centrale (f) qui répondroit au point de cette Courbe où ce rayon oſculateur aboutiroit, ſeroit alors ſeulement finie ou zero, ſelon que le rayon ou la direction de cette force toucheroit cette Courbe en ce point, ou non : Dans le premier cas cette force ſeroit finie ou de même genre que la péſanteur, parcequ'alors *ds* ſeroit infinie par raport à *dx* comme

* *Second cas où les forces centrales doivent encore être infinies par raport aux péſanteurs.*

† *Cas où les forces centrales ne peuvent être que finies ou nulles.*

r le ſeroit par raport à h; & dans le ſecond cette force ſeroit nulle ou zero par raport à la péſanteur, parce qu'alors la fraction $\frac{2hds}{dx}$ le ſeroit par raport à r.

Le premier de ces deux cas eſt auſſi celui du mouvement d'un corps ſuivant une ligne droite qui paſſeroit par le centre de ſes forces, par éxemple, ſuivant une verticale qui paſſe par le centre de ſa péſanteur, toute ligne droite pouvant être regardée comme une Courbe dont les rayons oſculateurs ſont par tout infinis; puiſqu'une Courbe dont tous les rayons oſculateurs deviendroient ainſi infinis, dégénereroit en ligne droite.

* 4°. Au contraire en tout autre cas que les précédens (*n.* 1, 2, & 3.) les forces centrales (f) ſeront toûjours finies tant que les péſanteurs (p) des corps où elles ſe trouvent, & leurs viteſſes ou les hauteurs (h) qui les déterminent aux différens points des Courbes que ces corps décrivent, ſeront finies, ainſi qu'on les ſuppoſe par tout dans cet écrit. Je dis tant que les péſanteurs (p) & les hauteurs (h) ſeront finies: parceque quand il n'y auroit qu'une de ces deux grandeurs p ou h qui fût infinie dans la Regle $f = \frac{2phds}{rdx}$, il eſt manifeſte que le rayon (r) de la Dévelopée de la Courbe en queſtion, y devroit être infini pour que la force (f) y demeurât finie. Et ſi les deux grandeurs p & h ſont toutes deux infinies dans cette Regle, il n'eſt pas moins clair que la force centrale (f) du corps *décrivant* où cela ſe trouveroit, ſeroit infinie dans tous les points de la Courbe qu'il décri-

* *Cas où les forces centrales ſont toûjours finies.*

criroit, même en ceux où le rayon (r) de ſa Dévelopée ſeroit infini, dx ne pouvant jamais être infinie par raport à ds.

* XXIII. *Corol.* 2. Il ſuit de la même Regle $f = \frac{2phds}{rdx}$ que lorſque le centre C des forces eſt en R, c'eſt à dire, lorſque les forces centrales du corps L qu'on ſuppoſe décrire la Courbe MLN, tendent ſuivant les rayons RL correſpondans de la Dévelopée de cette Courbe, ou que leur centre C eſt ſur cette Dévelopée; alors LD ſe confondant avec Ll, & rendant par là $dx = ds$, l'on aura $f = \frac{2ph}{r}$ ou $f.p::2h.r::h.\frac{1}{2}r$. C'eſt à dire en général, qu'alors en chaque point L de quelque Courbe MLN que ce ſoit, la péſanteur du corps L qu'on ſuppoſe la décrire en tendant toûjours ſuivant le rayon LR correſpondant de la Dévelopée de cette Courbe, ſera à ſa force centrale ou de tendance ſuivant LR, comme la moitié de ce rayon de Dévelopée, à la hauteur d'où ce corps tombant auroit aquis à la fin de ſa chute en vertu de ſa ſeule péſanteur, une viteſſe égale à celle (quelle qu'elle ſoit) qu'il a effectivement en chaque point L ſuivant l'élément correſpondant Ll de cette même Courbe MLN.

† XXIV. *Corol.* 3. Donc lorſque de telles hauteurs (h) ſeront comme les correſpondans des rayons (r) de la Dévelopée de cette Cour-

* *Raport des forces centrales aux péſanteurs des corps, lorſque les directions de ces forces ſont ſuivant les rayons oſculateurs des Courbes que ces corps décrivent.*

† *Cas où les forces centrales dirigées ſuivant les rayons oſculateurs des Courbes en queſtion, ſont égales entr'elles.*

be *MLN*, c'eſt à dire, lorſque les viteſſes le long de cette Courbe *MLN* ſeront comme les racines de ces rayons correſpondans ; les forces centrales tendantes ſuivant ces mêmes rayons, ſeront égales entr'elles: puiſque le raport de h à $\frac{1}{2} r$, ſe trouvant alors conſtant, celui de f à p conſtante le ſeroit de même.

* XXV. *Corol.* 4. D'où il ſuit de plus que toutes ces forces du corps *L* ſeroient non-ſeulement égales entr'elles, mais auſſi égales chacune à la péſanteur de ce corps, ſi ce raport conſtant des hauteurs (h) aux moitiez des rayons (r) correſpondans de la Dévelopée de la Courbe *MLN* qu'on le ſuppoſe décrire avec les viteſſes que ces hauteurs déterminent, étoit un raport d'égalité: c'eſt à dire, ſi chacune de ces hauteurs (h) étoit égale à la moitié de chaque rayon (r) correſpondant de la Dévelopée de cette Courbe *MLN*; ou (ce qui revient au même) ſi les viteſſes de ce corps à chaque point *L* ſuivant cette Courbe, étoient chacune la même que celle qu'il aquieroit en vertu de ſa ſeule péſanteur en tombant de la hauteur de la moitié du rayon oſculateur correſpondant. Et réciproquement, &c.

† XXVI. *Corol.* 5. Il ſuit de tout cela que la

* *Cas où les forces centrales d'un même corps ſur une même Courbe, ſeroient non-ſeulement égales entr'elles, mais auſſi à la péſanteur de ce corps.*

† *Sur un cercle les forces centrales dirigées ſuivant ſes rayons, ſeroient à la péſanteur du corps qui le décriroit, comme chacune des hauteurs déterminatrices des viteſſes correſpondantes de ce corps ſur ce cercle, ſeroit au demi-rayon de ce même cercle, & par conſéquent égales à cette péſanteur, quand cette hauteur le ſeroit à ce demi-rayon.*

la Dévelopée du cercle ſe réuniſſant toute au centre de ce même cercle, non-ſeulement la force centrale du corps qui le décrira de quelque viteſſe que ce ſoit, en tendant toûjours ſuivant des lignes qui paſſent toutes par ce point, c'eſt à dire, ſuivant les rayons de ce cercle, ſera toûjours à la péſanteur de ce même corps, comme la hauteur déterminatrice de ſa viteſſe en chaque point de la circonférence de ce cercle, ſera à la moitié du rayon de ce même cercle; mais auſſi que lorſque cette hauteur ſe trouvera égale à la moitié de ce rayon, la force centrale du corps qui décrira ainſi ce cercle, devra être de même égale à ſa péſanteur, ainſi que M. *Huygens* l'a trouvé, & pluſieurs autres après lui.

Il ſuit réciproquement que lorſque ces deux forces ſeront égales entr'elles, cette hauteur déterminatrice de la viteſſe du corps *décrivant*, ſera auſſi égale à la moitié du rayon du cercle qu'on le ſuppoſe décrire.

* XXVII. *Corol.* 6. Puiſque (*art.* 24.) les forces centrales ſuivant les rayons d'un cercle, qu'auroit un corps qui le décriroit avec quelque variété de viteſſes que ce fût, ſeroient toûjours chacune à la péſanteur de ce corps, comme la correſpondante des hauteurs déterminatrices de ſes viteſſes aux différens points de ce cercle, ſeroit au demi-rayon de ce même cercle, il ſuit encore delà que ces forces centrales du corps *décrivant* doivent toûjours être entr'elles comme les correſpondantes des hauteurs déterminatrices de ſes viteſſes ſur le cercle qu'il décrit; & par conſéquent auſſi comme les quarrez de

* *Ces forces centrales ainſi dirigées ſur un cercle, doivent auſſi toûjours être entr'elles comme les quarrez des viteſſes du corps décrivant.*

ces mêmes viteſſes, puiſque ces quarrez ſuivent toûjours la raiſon de ces hauteurs dans l'hypothêſe de péſanteur conſtante dont il s'agit ici.

* XXVIII. *Corol.* 7. Pour rendre préſentement la Regle générale $f = \frac{2phds}{rdx}$ des art. 9, 14, & 19. facilement applicable à toutes ſortes de Courbes, ſoit geométriques, ſoit méchaniques, enſorte qu'il ſuffiſe d'y introduire l'équation de chacune de ces Courbes pour avoir tout d'un coup le raport des forces centrales à la péſanteur abſolue du corps qui la décrit ; il y faut ſubſtituer les ſix valeurs infiniment générales du rayon (r) de la dévelopée de la Courbe MLN en queſtion, leſquelles ſe trouvent dans les Mem. de 1701. art. 10. & 14. pag. 33. & 37. où ce rayon s'appelle n. Pour cela outre $Ll = ds$, & $LD = dx$, il faut auſſi ſuppoſer $LC = y$, avec l'arc circulaire $MG = z$ décrit du centre C, & d'un rayon quelconque $MC = a$; ce qui donnant $CG\ (a).\ CL\ (y) :: Gg\ (dz).\ LD\ (dx) = \frac{ydz}{a}$ changera déja cette équation $f = \frac{2phds}{rdx}$ en $f = \frac{2aphds}{rydz}$. Alors ces ſix valeurs de r ſubſtituées dans ces deux équations, ſavoir les trois premiéres dans la premiere, & les trois autres dans la ſeconde, les changeront en autant de Formules ou Regles toutes auſſi générales pour comparer les forces centrales avec les péſanteurs abſolues des corps mûs en lignes Courbes

* *Maniére de rendre la Regle de comparaiſon des forces centrales aux péſanteurs des corps, trouvée dans les art. 9, 14, & 19. facilement applicable à toutes ſortes de Courbes.*

bes quelconques, & avec telle variété de viteſſes qu'on voudra: Les voici ces ſix Regles.

FORMULES OU REGLES

Infiniment générales des raports des Forces centrales avec les Peſanteurs abſolues des corps mûs de viteſſes variées à diſcrétion le long de telles Courbes qu'on voudra.

$$1^{\circ}.\ f = \frac{dxdyds + ydsddx - ydxdds}{ydydxds} \times 2ph.$$

$$2^{\circ}.\ f = \frac{dsdx^2 + ydyddx - ydsddy}{ydsdx^2} \times 2ph.$$

$$3^{\circ}.\ f = \frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{ydxds^2} \times 2ph.$$

$$4^{\circ}.\ f = \frac{2dzdyds + ydsddz - ydzdds}{ydydzds} \times 2ph.$$

$$5^{\circ}.\ f = \frac{ydsdz^2 + aadyddz - aadsddy}{yydsdz^2} \times 2ph.$$

$$6^{\circ}.\ f = \frac{dzds^2 + dzdy^2 + ydyddz - ydzddy}{ydzds^2} \times 2ph.$$

* XXIX. *Corol.* 8. Ces ſix Formules ou Regles des forces centrales comparées aux peſanteurs des corps mûs en lignes courbes, ſe diverſifieront à l'infini ſelon ce qu'on leur ſuppoſera de conſtant, ainſi que celles des rayons oſculateurs des art. 10. & 24. pag. 33, 34, 35. & 37, 38. des Mem. de 1701. qu'on y vient d'introduire, ſe diverſifient dans les art. 11. & 15. pag. 36, 38. & 39. de ces mêmes Mem. Par éxemple,

1°. Si

* *Maniere de détailler les ſix Regles précédentes en une infinité d'autres, ſelon la variété infinie de tous ce qu'on y peut ſuppoſer de conſtant.*

1°. Si l'on ſuppoſe dx conſtante, c'eſt à dire $ddx = o$, la premiére de ces Formules du précédent art. 28. donnera $f = \frac{dyds - yddx}{ydyds} \times 2ph$; & la troiſiéme, $f = \frac{ds^2 - yddy}{yds^2} \times 2ph$.

2°. Si l'on fait dy conſtante, c'eſt à dire $ddy = o$, la ſeconde de ces mêmes Formules générales du précédent article 28. donnera $f = \frac{dsdx^2 + ydydds}{ydsdx^2} \times 2ph$; la troiſiéme, $f = \frac{dxds^2 + ydyddx}{ydxds^2} \times 2ph$; la cinquiéme, $f = \frac{ydsdz^2 + aadydds}{yydsdz^2} \times 2ph$; & la ſixiéme, $f = \frac{dzds^2 + dzdy^2 + ydyddz}{ydzds^2} \times 2ph$.

3°. Si l'on fait ds conſtante, c'eſt à dire $dds = o$, la premiére des mêmes Formules générales de l'art. 28. donnera $f = \frac{dxdy + yddx}{ydydx} \times 2ph$; la ſeconde, $f = \frac{dx^2 - yddy}{ydx^2} \times 2ph$; la quatriéme, $f = \frac{2dydz + yddz}{ydydz} \times 2ph$; & la cinquiéme, $f = \frac{ydz^2 - aaddy}{yydz^2} \times 2ph$.

4°. Si l'on fait dz conſtante, c'eſt à dire $ddz = o$, ce qui eſt la même choſe (*art.* 28.) que $\frac{dx}{y}$ conſtante, ou $yddx - dxdy = o$: la premiére & la quatriéme des mêmes Regles du précédent art. 28. donneront $f = \frac{2dyds - yddx}{ydyds} \times 2ph$; la troiſiéme & la ſixiéme donneront pareillement auſſi $f =$

$f = \frac{ds^2 + dy^2 - yddy}{yds^2} \times 2ph.$

5°. Si l'on fait préſentement le produit ydx conſtant, c'eſt à dire $dxdy + yddx = o$, ou $ddx = -\frac{dxdy}{y}$; la ſubſtitution de cette valeur de ddx dans la premiere & dans la troiſiéme des Formules générales du précédent art. 28. changera la premiere en $f = -\frac{dds}{dyds} \times 2ph$, & la troiſiéme en $f = \frac{dx^2 - yddy}{yds^2} \times 2ph.$

6°. De même ſi l'on fait le produit $dxdy$ conſtant, c'eſt à dire, $dxddy + dyddx = o$, ou $ddx = -\frac{dxddy}{dy}$; la ſubſtitution de cette valeur de ddx dans la troiſiéme des Formules générales du précedent article 28. donnera $f = \frac{ds^2 - 2yddy}{yds^2} \times 2ph.$

Cette même Formule ſe trouvera encore ſi l'on conſidére que cette hypothêſe de $dxdy$ conſtant, donnant auſſi $dds\left(\frac{dxddx + dyddy}{ds}\right) = \frac{-dx^2ddy + dy^2ddy}{dyds}$; la ſubſtitution de cette valeur de dds, & de la valeur précédente de ddx dans la premiére des Formules générales du précédent article 28. la changera encore de même en celle-ci: $f = \frac{dxdy^2ds^2 - ydxds^2ddy + ydx^2ddy - ydxdy^2ddy}{ydxdy^2ds^2} \times 2ph$ (à cauſe de $-ds^2 + dx^2 = -dy^2$) $= \frac{dxdy^2ds^2 - 2ydxdy^2ddy}{ydxdy^2ds^2} \times 2ph = \frac{ds^2 - 2yddy}{yds^2} \times 2ph$, comme ci-deſſus nomb. 6.

C'eſt

C'eſt ainſi que les ſix Regles générales de l'art. 28. en produiront de nouvelles à l'infini, ſelon la variété infinie des termes conſtans que peut fournir $z^l y^m s^n dz^\lambda dx^p dy^q ds^r$; ce qui eſt préſentement trop viſible pour s'y arrêter davantage. Paſſons donc à quelques éxemples qui en faſſent voir l'uſage: la ſeconde des Formules de cet article-ci nous ſuffira; on ſe ſervira de même des autres à l'infini.

EXEMPLE I.

* XXX. Soit la Spirale logarithmique ordinaire MLN, dont C ſoit le centre auquel tende ſans ceſſe le corps qui la décrit de quelque viteſſe que ce ſoit. Toutes choſes demeurant les mêmes que ci-deſſus art. 28. ſavoir $CL = y$, $LD = dx$, &c. la nature de cette Courbe étant de faire par tout des angles égaux avec ſes ordonnées LC, & par conſéquent de rendre partout la fraction $\frac{dy}{dx}$ conſtante; ſi l'on ſuppoſe de plus chaque dx conſtante par raport aux immédiatement ſuivantes de part & d'autre; cette hypothêſe de $ddx = o$, rendra pareillement ici $ddy = o$. Donc cette même hypothêſe de dx conſtante donnant d'ailleurs (*art.* 29. *nomb.* 1.) $f = \frac{ds^2 - yddy}{yds^2} \times 2ph$ pour toutes ſortes de Courbes, l'on aura pour celle-

* FIG. VI. *Sur la Spirale logarithmique les forces centrales dirigées ſuivant les ordonnées ou par le centre de cette Courbe, ſont à la peſanteur du corps qui la décrit, comme les hauteurs déterminatrices de ſes viteſſes à chaque point, ſont à la moitié des ordonnées correſpondantes.*

celle-ci $f = \frac{ds^2}{yds^2} \times 2ph = \frac{2ph}{y}$, ou $f.p :: h.\frac{1}{2}y$. C'eſt à dire que les forces centrales du corps L ſuivant LC, doivent être ici à ſa péſanteur, comme les hauteurs (h) déterminatrices de ſes viteſſes en chaque point L ſuivant Ll, ſont à la moitié de chacune des ordonnées correſpondantes LC (y).

M. *De Fontenelle* a remarqué en faiſant l'extrait de ceci, que la même choſe ſe peut encore tirer immédiatement de la troiſiéme des Regles générales de l'art. 28. ſans y ſuppoſer de conſtant que la fraction $\frac{dy}{dx}$ rendue telle par la nature de la Courbe en queſtion. En effet cette fraction donnant ici $dxddy = dyddx$, ſi l'on ſubſtitue un des membres de cette équation à la place de l'autre dans cette troiſiéme Regle, cette même Regle ſe changera pour ici en $f = \frac{dxds^2}{ydxds^2} \times 2ph = \frac{2ph}{y}$: D'où réſulte $f.p :: h.\frac{1}{2}y$. comme ci-deſſus.

* XXXI. Mais on a vû dans l'art. 23. que ſi les forces centrales du corps L, tendoient ſuivant les rayons correſpondans LR de la Dévelopée PR de la Spirale logarithmique MLN dont il eſt ici queſtion, l'on auroit auſſi pour lors $f.p :: h.\frac{1}{2}LR$. Donc ſachant d'ailleurs (*Anal. des Infin. petits*, *art.* 91.) que les ordonnées LC de cette Spirale ſont toutes proportionnelles aux rayons correſpondans LR, on aura auſſi $f.p :: h.\frac{1}{2}y$. comme ci-deſſus.

* *Les forces centrales dirigées ſuivant une ordonnée quelconque de Spirale logarithmique, & enſuite ſuivant ſon rayon oſculateur correſpondant, ſont égales entr'elles tant que les hauteurs déterminatrices des viteſſes correſpondantes du corps* Décrivant *ſeront comme ces lignes.*

portionelles aux rayons correſpondans LR de ſa Dévelopée, il eſt viſible qu'à chaque point L les forces centrales du corps L tendant ſucceſſivement ſuivant l'ordonnée LC & ſuivant le rayon LR correſpondans, ſeront égales entr'elles, tant que les hauteurs (h) déterminatrices des viteſſes en ce point pour l'un & pour l'autre de ces cas, ſeront comme ces lignes : c'eſt à dire, tant qu'au même point L la viteſſe (ſuivant Ll) de ce corps tendant vers C, ſera à la viteſſe de ce même corps tendant vers R, comme la racine quarrée de LC à une pareille racine de LR; & ces hauteurs ſeront auſſi proportionelles entr'elles.

* XXXII. Il eſt ici à remarquer que le cercle pouvant paſſer pour une eſpece de Spirale logarithmique perpendiculaire à toutes ſes ordonnées, leſquelles ſeront ici tout à la fois les rayons de la Dévelopée de cette Spirale logarithmique & ceux de ce cercle au centre duquel toute cette Dévelopée ſe réuniroit ; il ſuit encore de l'art. 30. ce qui a déja été trouvé dans l'art. 26. ſavoir que les forces centrales d'un corps quelconque ſuivant les rayons d'un cercle qu'il décriroit avec telle variété ou variation de viteſſes qu'on voudroit, ſeroient toûjours chacune à ſa péſanteur, comme la hauteur déterminatrice de ſa viteſſe en chaque point correſpondant de ce cercle, ſeroit au demi-rayon de ce même cercle ; & conſéquemment auſſi que lorſque cette hauteur ſe trouvera égale à ce demi-rayon de cercle, cette force centrale ſera pareillement égale à la peſanteur du corps qui le décrira.

Delà ſuit encore l'art. 27. ainſi qu'on l'a déja

* *Nouvelle preuve des art.* 26. *&* 27.

ja conclu de l'art. 26. qu'on voit renfermé dans celui-ci.

EXEMPLE II.

* XXXIII. Soit en général *CLMLN* une Spirale *Fermatienne* quelconque, dont *C* ſoit le centre, auſſi-bien que de l'arc infiniment petit *LD*, & du cercle *MEFM* répondant à telle révolution qu'on voudra de cette Spirale. Toutes choſes demeurant les mêmes que ci-deſſus art. 28. ſavoir $CL=y$, $LD=dx$, $Ll=ds$; ſoit la circonference $MEFM=c$, & ſon rayon CM ou $CE=a$.

L'on aura la ſomme ($\int Ee$) des Ee, pour l'abſciſſe de cette circonférence depuis le commencement des révolutions juſqu'en E; ce qui donnera $c.\int Ee :: a^m.y^m$. D'où réſulte $cy^m=a^m\times\int Ee$ pour l'équation de ces Spirales en général. Donc $mcy^{m-1}dy=a^m\times Ee$. Mais $CL(y).CE(a)::LD(dx).Ee=\frac{adx}{y}$. Donc auſſi $mcy^{m-1}dy=\frac{a^{m-1}dx}{y}$, ou $dy=\frac{a^{m-1}dx}{mcy^m}$; ce qui donne $\frac{a^{2m-2}dx^2}{mmccy^{2m}}+dx^2=dy^2+dx^2=ds^2$, ou $ds^2=\frac{a^{2m-2}+mmccy^{2m}}{mmccy^{2m}}\times dx^2$; & de plus (en faiſant dx conſtante) l'on aura $ddy=\frac{-a^{m-1}y^{m-1}dydx}{cy^{2m}}=$

* *Raport général des forces centrales aux péſanteurs des corps ſur toutes ſortes de Spirales* Fermatiennes *ſuivant les ordonnées deſquelles ces forces ſeroient dirigées.* FIG. VII.

$= \frac{-a^{m+1}dydx}{cy^{m+1}}$ (à cauſe de $dy = \frac{a^{m+1}dx}{mcy^m}$)

$= \frac{-a^{2m+2}dx^2}{mccy^{2m+1}}$. Donc cette hypothêſe de dx conſtante, donnant (*art.* 29. *nomb.* 1.) $f = \frac{ds^3 - ydddy}{yds^2} \times 2ph$, la ſubſtitution de ces valeurs de ds^2 & de ddy dans cette formule, donnera auſſi

$$f = \frac{\frac{a^{2m+2} + mmccy^{2m}}{mmccy^{2m}} \times dx^2 + \frac{a^{2m+2}}{mccy^{2m}} \times dx^2}{\frac{ya^{2m+2} + mmccy^{2m+1}}{mmccy^{2m}} \times dx^2}$$

$$\times 2ph = \frac{\overline{m+1} \times a^{2m+2} + mmccy^{2m}}{ya^{2m+2} + mmccy^{2m+2}} \times 2ph :$$

c'eſt à dire en général pour toutes ces Spirales *Fermatiennes* à l'infini, $f.p :: h. \frac{ya^{2m+2} + mmccy^{2m+1}}{\overline{2m+2} \times a^{2m+2} + 2mmccy^{2m}}$.

Il n'y a plus qu'à détailler cette Formule ou Analogie par la ſubſtitution de telle valeur qu'on voudra donner à m, pour avoir le raport de p à f, c'eſt à dire, de la péſanteur du corps qu'on ſuppoſe décrire la Spirale déterminée par cette valeur de m, aux forces centrales de ce même corps ſuivant les ordonnées de cette Spirale. Par éxemple, la Spirale d'*Archimede*, qui eſt la premiére de ces *Fermatiennes*, aiant $m = 1$, l'Analogie précédente donnera pour elle $f.p :: h. \frac{ya^4 + ccy^3}{4a^4 + 2ccyy}$. Au contraire la premiére des Spirales hyperboliques *Fermatiennes* aiant $m = -1$, l'on

l'on aura pour elle $f. p :: b. \frac{ya^0 + ccy^{-1}}{2ccy^{-2}} :: b. \frac{y^3 + ccy}{2cc}$. Et ainſi de toutes les autres Spirales *Fermatiennes*, tant paraboliques que hyperboliques à l'infini.

On trouvera auſſi de même le raport des forces centrales aux péſanteurs des corps mûs ſuivant toutes les autres Spirales réſultantes de la génération générale qu'on en a donné dans les Mem. de 1704. pag. 91. &c.

EXEMPLE III.

* XXXIV. Soit *MLN* l'Ellipſe ordinaire décrite par le corps *L* mû comme l'on voudra en tendant toûjours ſuivant des directions ou lignes droites qui paſſent toutes par un de ſes foyers, par exemple par le foyer *C*; ſoit $MN = a$ le grand axe de cette Ellipſe, & la diſtance de ſes foyers entr'eux $= c$. Tout le reſte demeurant le même que ci-deſſus art. 28. ſavoir les ordonnées *CL*, *Cl*, indéfiniment proches l'une de l'autre; l'arc *LC* décrit du centre *C*; $CL = y$, $LD = dx$, $Ll = ds$.

La nature de cette Ellipſe donnera $dy\sqrt{aa - cc} = dx\sqrt{cc - aa + 4ay - 4yy}$ pour ſon équation à ſon foyer *C*, ou (en prenant $bb = aa - cc$) $bdy = dx\sqrt{4ay - 4yy - bb}$. Donc $4ay - 4yy \times dx^2 = bb\,dy^2 + bb\,dx^2 = bb\,ds^2$, ou $ds^2 = \frac{4ay - 4yy}{bb} \times dx^2$. Or en faiſant (ſi l'on veut) dx

* *Raport des forces centrales aux péſanteurs des corps ſur l'Ellipſe ordinaire, par un des foyers de laquelle ces forces ſeroient dirigées.* FIG. VIII.

dx conſtante, cette même équation $b\,dy = dx\sqrt{4ay - 4yy - bb}$ donnera de plus $ddy = \frac{2ady\,dx - 4y\,dy\,dx}{b\sqrt{4ay - 4yy - bb}} = \frac{2adx^2 - 4ydx^2}{bb}$. Donc cette même hypothêſe de dx conſtante, donnant (*art.* 29. *nomb.* 1.) $f = \frac{ds^2 - y\,ddy}{y\,ds^2} \times 2ph$, elle donnera auſſi dans le cas preſent $f = \frac{\sqrt{4ay - 4yy} \times dx^2 - \frac{2ay - 4yy}{\sqrt{4ay - 4yy}} \times dx^2}{4ay - 4yy \times ydx^2} \times 2ph = \frac{2ay}{4ayy - 4y^3} \times 2ph = \frac{aph}{ay - yy}$, ou $f.p :: h. \frac{ay - yy}{a}$. D'où l'on voit que les forces centrales tendantes ſuivant des directions ou des lignes droites qui paſſent toutes par un des foyers de l'Ellipſe ordinaire, ſont toûjours à la péſanteur du corps qui la décrit, comme les hauteurs (h) déterminatrices des viteſſes de ce corps le long de cette Courbe, aux fractions $\frac{ay - yy}{a}$ faites des y (CL) correſpondantes aux points où il a effectivement les viteſſes que ces hauteurs déterminent, c'eſt à dire, les mêmes viteſſes qu'il aquieroit en tombant de ces hauteurs (h) en vertu de ſa ſeule péſanteur.

* XXXV. Si preſentemeut on ſuppoſe que l'Ellipſe précédente (*art.* 34.) ſe change en un cercle dont C ſoit le centre, & MN (a) le diametre ; en ce cas CL (y) ſe trouvant le rayon (r) $\frac{1}{2}\,a$ de ce cercle, la formule $f = \frac{aph}{ay - yy}$ qu'on vient (*art.* 34.) de trouver, ſe changera ici en $f =$

* *Nouvelle preuve des art.* 26, 27, & 32.

$f = \frac{aph}{\frac{1}{2}aa - \frac{1}{4}aa} = \frac{aph}{\frac{1}{4}aa} = \frac{4ph}{a} = \frac{4ph}{2r} = \frac{2ph}{r}$. Ce qui donnera ici $f.p :: h.\frac{1}{2}r$. C'eſt à dire que les forces centrales d'un corps qui décriroit un cercle avec telles viteſſes qu'on voudroit, en tendant toûjours ſuivant les rayons de ce cercle, comme lorſqu'il le décrit attaché à un des bouts d'une corde non extenſible & fixe par l'autre bout au centre de ce cercle, ſeroient à ſa péſanteur en chaque point de la circonférence de ce cercle, comme la hauteur déterminatrice de ſa viteſſe en ce point ſeroit à la moitié de ſon rayon, ainſi qu'on l'a déja trouvé dans les art. 26. & 32. D'où l'on voit encore (comme dans ces deux articles) que lorſque cette hauteur ſera égale à ce demi-rayon, la force centrifuge de ce corps ſera auſſi préciſément égale à ſa péſanteur ; & réciproquement.

* XXXVI. De la maniére dont on vient de trouver (*art.* 34.) $f = \frac{aph}{ay - yy}$ pour l'Ellipſe, on trouvera auſſi $f = \frac{aph}{ay + yy}$, ou $f.p :: h.\frac{ay+yy}{a}$. pour l'hyperbole dont le centre C des forces ou des tendances du corps L en la décrivant, ſeroit le foyer intérieur; puiſqu'en prenant $bb = cc - aa$, à cauſe que la diſtance (c) des foyers de cette Courbe, eſt plus grande que ſon diametre tranſverſe (a), ſon équation à ce centre ou foyer C, ſera $bdy = dx\sqrt{\cdot 4ay + 4yy - bb}$.

† XXXVII. Mais ſi ce centre C des forces

* *Raport des forces centrales aux péſanteurs des corps ſur l'hyperbole ordinaire, par le foyer interieur de laquelle ces forces ſeroient dirigées.* † *Quel eſt ce raport lorſque ces forces ſont dirigées par le foyer extérieur de l'hyperbole.*

du corps L, eſt le foyer extérieur de l'hyperbole; alors cette Courbe aiant $bdy = dx\sqrt{4yy - 4ay - bb}$ pour ſon équation à ce foyer, on trouvera de même pour elle $f = \frac{-aph}{yy - ay} = \frac{aph}{ay - yy}$, laquelle formule ſemble la même que celle qu'on vient de trouver pour l'Ellipſe dans l'art. 34. Mais celle-ci aiant $y > a$, elle doit être négative, au lieu que l'autre eſt poſitive : Auſſi les forces centrales ſont-elles ici centripetes de centrifuges qu'elles étoient-là & dans le précédent art. 36. où elles tendent ſuivant des diréctions qui paſſent par des foyers intérieurs.

* XXXVIII. Dans les articles 34. & 36. ſi l'on ſuppoſe l'autre foyer infiniment éloigné; alors a devenant infinie, toutes ces formules ſe réduiront à $f = \frac{aph}{ay} = \frac{ph}{y}$ pour la Parabole; ce qui donnera $f\ p :: h.y.$ pour cette Courbe, c'eſt à dire que les forces centrales d'un corps qui décrit une Parabole en tendant toûjours ſuivant des directions qui paſſent toutes par ſon foyer, ſont à la péſanteur abſoluë de ce même corps, comme les hauteurs déterminatrices des viteſſes de ce corps en différens points de cette Courbe, ſont aux diſtances où il ſe trouve alors du foyer de cette même Parabole.

EXEMPLE IV.

† XXXIX. Soit *MLN* un cercle décrit par le

* *Quel eſt auſſi ce raport ſur la parabole lorſque les forces centrales ſont dirigées par ſon foyer.*

† *Raport général des forces centrales aux péſanteurs des corps ſur un cercle par quelque point du plan de ce cercle que ces forces ſoient dirigées.* FIG. IX. X.

le corps L mû encore comme l'on voudra en tendant toûjours ſuivant des directions LC qui paſſent toutes par quelque point C pris à diſcrétion ſur le plan de ce cercle dont le centre ſoit F. Par ce point C ſoit le diametre MN avec les lignes de direction CL, Cl, indéfiniment proches l'une de l'autre ; ſoit auſſi l'arc LD décrit du centre C, avec FG perpendiculaire ſur CL. Soient enfin $CF = c$ & $FL = r$ conſtantes, outre $CL = y$, $LD = dx$, & $Ll = ds$, comme ci-deſſus art. 9. & 28.

Cela poſé, l'on aura $Ll\,(ds).\ LD\,(dx) ::\ FL\,(r).\ LG = \frac{rdx}{ds}$. Et $Ll\,(ds).\ lD\,(dy) ::\ FL\,(r).\ FG = \frac{rdy}{ds}$. Donc $CG\left(\sqrt{\overline{FC}^2 - \overline{FG}^2}\right) = \sqrt{cc - \frac{rrdy^2}{ds^2}}$.

Donc auſſi $CL\,(y) = \frac{rdx}{ds} + \frac{\sqrt{ccds^2 - rrdy^2}}{ds}$, ou $yds - rdx = \sqrt{ccds^2 - rrdy^2}$; & en quarrant, $yyds^2 - 2rydxds = ccds^2 - rrdy^2 - rrdx^2 = ccds^2 - rrds^2$, ou $2rydx = yy + rr - cc \times ds$ (ſoit $2nn = yy + rr - cc$) $= 2nnds$, ou bien encore $\frac{rryydx^2}{n^4} = ds^2 = dx^2 + dy^2$: ce qui donne auſſi $\frac{rryy - n^4}{n^4} \times dx^2 = dy^2$, ou $dy = \frac{dx\sqrt{rryy - n^4}}{nn}$. Donc en faiſant dx conſtante, l'on aura pour lors

$$ddy = \frac{\frac{rrnnydxdy - 2n^4dxdn}{\sqrt{rryy - n^4}} - 2ndxdn\sqrt{rryy - n^4}}{n^4} =$$

$$= \frac{rrnnydxdy - 2n^4dxdn - 2rryyndxdn + 2n^4dxdn}{n^4\sqrt{rryy - n^4}} =$$

$= \frac{rrnnydxdy - 2rryyndxdn}{n^4\sqrt{rryy - n^4}}$. Mais puiſque (*hyp.*) $nn = \frac{yy + rr - cc}{2}$, l'on aura $2ndn = ydy$. Donc auſſi l'on aura $ddy = \frac{rrnnydxdy - rry^3dxdy}{n^4\sqrt{rryy - n^4}}$ $\left(\text{à cauſe de } dy = \frac{dx\sqrt{rryy - n^4}}{nn}\right) = \frac{rrnnydx^2 - rry^3dx^2}{n^6}$, outre $ds^2 = \frac{rryydx^2}{n^4}$. Par conſequent la preſente hypothêſe de dx conſtante, donnant auſſi (*art.* 29. *nomb.* 1.) $f = \frac{ds^2 - yddy}{yds^2} \times 2ph$, l'on aura enfin $f = \frac{nnrryydx^2 - nnrryydx^2 + rry^4dx^2}{nnrry^3dx^2} \times 2ph = \frac{2yph}{nn}$ $\left(\text{à cauſe de } nn = \frac{yy + rr - cc}{2}\right) = \frac{4yph}{yy + rr - cc}$, ou $f.p :: h. \frac{yy + rr - cc}{4y}$. c'eſt à dire (*art.* 4.) que la force centrale du corps L ſuivant LC, ſera toûjours à ſa péſanteur abſoluë, en quelque point L de la circonférence circulaire MLN que ce corps ſe trouve, comme la hauteur d'où il aquieroit en tombant ce qu'il a de viteſſe en ce point L, ſeroit à la fraction $\frac{yy + rr - cc}{4y}$. dont les y (CL) paſſeroient par ce même point L.

* XL. On voit delà que ſi le centre C des Forces (f) étoit en F au centre de ce cercle; alors aiant $c = o$, & $y = r$, la derniére Analogie du précédent art. 39. ſe changeroit en $f.p :: h. \frac{2rr}{4r} :: h. \frac{1}{2}r$. c'eſt

* *Nouvelle preuve des art.* 26, 27, 32, & 35.

c'eſt à dire que les forces centrales du corps L tendantes alors ſuivant LF, ſeroient à ſa péſanteur en chaque point L de la circonférence circulaire qu'il décriroit, comme la hauteur d'où il aquieroit en tombant ce qu'il a de viteſſe en ce point, ſeroit à la moitié du rayon de ce cercle, ainſi qu'on l'a déja trouvé dans les art. 26. 32. & 35.

* XLI. Mais ſi le centre C des Forces (f) étoit à l'extrémité M du diametre de ce même cercle; aiant alors $c=r$, ou $rr-cc=o$, il ſuit de même de la derniére Analogie de l'art. 39. que ces forces centrales (f) tendantes alors en M, ſeroient à la péſanteur (p) du corps L en chaque point L de la circonférence qu'on le ſuppoſe décrire:: $h.\frac{1}{4}y$. c'eſt à dire, comme la hauteur d'où il aquieroit en tombant ce qu'il a de viteſſe en ce point, ſeroit au quart de ſa diſtance (CL) au centre ou foyer C des forces alors en M.

† XLII. Si préſentement on ſuppoſe que le centre C des Forces (f) ſoit hors du cercle, comme dans la Fig. 10. Alors aiant $rr-cc$ (*art.* 39.) $= FM \times FM - FC \times FC = -MC \times NC = -LC \times \lambda C$, & $yy = LC \times LC$, ou $yy = \lambda C \times \lambda C$; la derniére Analogie de l'art. 39. ſe changera ici en $f.\ p :: h.\ \frac{LC \times LC - LC \times \lambda C}{4LC} :: h.\ \frac{LC - \lambda C}{4} :: h.\ \frac{1}{4} L\lambda :: h.\ \frac{1}{2} LG$. depuis N de part & d'autre juſqu'aux points T ou CL & $C\lambda$ de-

 vien-

* *Raport des péſanteurs aux forces centrales pour le cas où le centre de ces forces ſeroit un point quelconque de la circonference de ce cercle.*

† *Quel ſeroit ce raport ſi le centre de ces forces étoit hors la circonference de ce cercle ſur ſon an.* FIG. X.

viennent touchantes du cercle en queſtion ; Et en $f. p :: h. \frac{\lambda C \times \lambda C - LC \times \lambda C}{4\lambda C} :: h. \frac{\lambda C - LC}{4} :: h. -\frac{1}{4} L\lambda :: h. -\frac{1}{2} LG$. depuis M. de part & d'autre juſqu'aux mêmes points d'attouchement.

* XLIII. D'où l'on voit que lorſque le corps L ſera en N ou en M, c'eſt à dire aux extrémitez du diametre MN qui paſſe par le centre C des forces (f) de ce corps, l'on aura $f. p :: h. \mp \frac{1}{2} NF (\mp \frac{1}{2} r)$. ſavoir en $N :: h. -+\frac{1}{2} r$. Et en $M :: h. -\frac{1}{2} r$. c'eſt à dire de part & d'autre, $f. p :: h. \frac{1}{2} r$. par raport au centre F du cercle MLN, comme ſi le centre C des Forces (f) étoit en ce centre F, ainſi qu'on l'a trouvé pour ce cas-ci dans les art. 26. 32. 35. & 40.

† XLIV. Il ſuit auſſi de l'art. 39. que ces forces centrales (qui ſont centrifuges depuis N de part & d'autre juſqu'aux points d'attouchement T, & centripetes depuis M auſſi de part & d'autre juſqu'à ces mêmes points d'attouchement) doivent être infinies en l'un & en l'autre de ces points T par raport à la péſanteur du corps où elles ſe trouvent ; parce que $L\lambda$ ou LG devenant nulles en ces mêmes points, l'Analogie $f. p :: h. \mp \frac{1}{2} LG$. commune (*art.* 42.) à ces deux cas, ſe changera là en $f. p :: h. o.$ ſans que h ceſſe d'être réelle, le mouvement du corps L étant ſuppoſé ſe continuer toûjours en ces points d'attouchement. Ce qui s'accorde parfaitement avec l'art. 22. nomb. 1. où cela ſe voit convenir à toutes ſortes de Courbes.

C'eſt-là un Paradoxe qu'on va voir expliqué dans

* *Nouvelle preuve encore des art.* 26, 27, 32, 35. & 40.

† *Cas où les forces centrales ſeroient infinies ſur le cercle.*

dans un éclairciſſement particulier. On y verra auſſi que quelque changement qu'il arrive en chacun de ces points d'attouchement T *aux forces centrales* (f) *du corps* L, *en devenant centripetes ou centrifuges, de centrifuges ou centripetes qu'elles étoient juſqu'en ce point ; ce corps ne ſauroit continuer ſa route ſuivant* NTM, *ou* MTN, *c'eſt à dire, décrire ſeulement le demi-cercle* NTM, *tant que le centre* C *de ſes forces centrales ſe trouvera hors ce demi-cercle. Mais auparavant il eſt bon de faire les Remarques ſuivantes.*

REMARQUE I.

Sur l'étenduë des trois derniers articles 42. 43. & 44.

* XLV. Il eſt premiérement à remarquer que ces trois derniers Corollaires ou art. 42. 43. & 44. ſont encore vrais dans le cas où le centre *C* des Forces eſt infiniment éloigné, ſa diſtance n'y étant point déterminée. Ce qui a été démontré de ces forces pour ce cas dans les Mem. de 1700. pag. 300. Corol. 2. du Prob. 6. prouve auſſi qu'elles doivent être infinies dans les points où les touchantes tirées de leur centre *C*, rencontrent le cercle en queſtion. La même choſe ſe démontrera encore par raport à toute autre Courbe dans les points où elle ſeroit rencontrée par des touchantes tirées d'un pareil centre de forces. La formule $f = \frac{-ddy}{ds^2} \times 2ph$, qui dans ce cas particulier du centre *C* des forces

* *Regle de comparaiſon des forces centrales avec les peſanteurs des corps dans le cas où les directions de ces forces ſeroient paralleles entr'elles.*

ces (f) infiniment éloigné, réſulteroit de celle ($f = \frac{ds^2 - y\,ddy}{y\,ds^2} \times 2ph$) dont on vient de ſe ſervir dans l'art. 39. donneroit auſſi la même choſe en ſe ſervant d'équations dont les ordonnées (appellées auſſi y, quoique finies) ſuivant leſquelles tendroit le corps *décrivant*, ſeroient paralleles entr'elles, & terminées à un axe dont les élémens ſeroient dx.

* Par éxemple, en ſe ſervant de l'équation $yy = \frac{abx \pm bxx}{a}$ commune à toutes les Sections coniques, cette nouvelle formule $f = \frac{-2phddy}{ds^2}$ (en faiſant dx conſtante) donnera en général $f = \frac{2aabbph}{4aay^3 + y \times \overline{ab \pm 2bx}^2}$ pour toutes les Sections coniques: c'eſt à dire,

1°. $f = \frac{2aablph}{4aay^3 + y \times \overline{ab + 2bx}^2}$ pour l'Hyperbole;

2°. $f = \frac{2aabbph}{4aay^3 + y \times \overline{ab - 2bx}^2}$ pour l'Ellipſe;

3°. $f = \frac{2aaph}{4y^3 + y \times \overline{a - 2x}^2}$ pour le Cercle en faiſant $b = a$;

4°. $f = \frac{2bbph}{4y^3 + bby}$ pour la Parabole en prenant a infini.

Ce qui donne (dis-je) encore par tout là, $f = \frac{2aabbph}{o}$ (en prenant $x = o$ & $y = o$), c'eſt à dire

* *Application de la précédente Regle à toutes les Sections coniques.*

dire les forces centrales (f) infinies dans les points d'attouchement des touchantes paralleles aux ordonnées (y), ou aux directions de ces forces. Et ainſi d'une infinité d'autres Courbes auſquelles on pourroit appliquer de même la formule $f = \frac{-2phddy}{ds^2}$. Mais l'uſage de cette formule d'ordonnées paralleles, de même que celui de toutes les autres formules que l'art. 29. fournit encore, & que les autres Regles de l'art. 28. pourroient fournir auſſi à l'infini pour les ordonnées concourantes, & enſuite pour les ordonnées paralleles par la ſuppoſition de y infinie, étant le même que celui qu'on vient de faire de $f = \frac{ds^2 - yddy}{yds^2} \times 2ph$, l'on ne s'y arrêtera pas davantage.

REMARQUE II.

Sur le raport de la Peſanteur aux forces centrales dont le foyer ou centre eſt différent de celui des ordonnées de la Courbe en queſtion.

* XLVI. Il eſt auſſi à remarquer que ſi le centre des Forces, tant centrifuges que centripetes, du corps qui décrit une Courbe quelconque, étoit différent du centre des ordonnées de cette Courbe ſur le plan de laquelle il fût; la formule $f = \frac{4ph \times rl}{ds^2}$ des art. 4, 5, 6, & 8. fourni-

 roit

* *Regle de comparaiſon des forces centrales avec les péſanteurs des corps qui décriroient des Courbes dont le centre des ordonnées ſeroit différent de celui de ces forces, en conſidérant les élémens des Courbes comme Courbes eux-mêmes.* FIGUR. I.

roit encore des Regles plus générales que celles de l'art. 28. puiſqu'en confondant ces deux centres en un, les Regles de cet art. 28. deviendroient autant de Corollaires de celles-là.

Pour le voir, ſoit encore la Courbe MLN telle qu'on voudra, décrite par un corps L dont les forces centrales (f) ſoient toutes dirigées par F ſuivant LF, pendant que les ordonnées LC de cette Courbe continuent de s'aſſembler en C. Soient auſſi $Ll = ds$, les élémens de cette même Courbe; CL ou $Cl = y$, ſes ordonnées; $LD = dx$, perpendiculaire ſur Cl, & qui prolongée rencontre Fl en A; laquelle Fl rencontre auſſi en K la tangente LQ, que Cl prolongée rencontre pareillement en S. Soient de plus FL ou $Fl = q$, les rayons des forces (f). Soient enfin lO, lP, paralleles à LD, LF; & du diametre CF, le cercle CBF que CL, Cl, rencontrent en B, b; & dont CB ou $Cb = m$, FB ou $Fb = n$, ſont les cordes.

Cela fait, les triangles (*conſtr.*) ſemblables Fbl, ADl, donneront $bl\ (y - m).\ Fl\ (q) :: Dl.\ (dy).\ Al$ ou $AK = \frac{q\,dy}{y-m}$. Et $bl\ (y - m).\ Fb\ (n) :: Dl\ (dy).\ AD = \frac{n\,dy}{y-m}$. Ce qui donne $AL = dx + \frac{n\,dy}{y-m} = \frac{ydx - mdx + ndy}{y-m}$. Mais les triangles (*hyp.*) ſemblables KAL, KlO, donnent auſſi $AK\left(\frac{q\,dy}{y-m}\right).\ AL\ \left(\frac{ydx - mdx + ndy}{y-m}\right) :: lK.\ lO = \frac{ydx - mdx + ndy}{q\,dy} \times lK$. De plus les triangles (*hyp.*) ſemblables SDL, SlO, donnent pareillement SD ou $lD\ (dy).\ DL\ (dx) :: Sl.$

lO

$l0 = \frac{dx}{dy} \times Sl$. Donc $\frac{dx}{dy} \times Sl = \frac{ydx - mdx + ndy}{qdy} \times lK$; & par conſéquent auſſi $Sl = \frac{ydx - mdx + ndy}{qdx} \times lK$.

Or en conſidérant l'élément Ll de la Courbe propoſée, non comme un côté droit de polygone rectiligne, mais comme un véritable arc de cercle, on a auſſi trouvé ci-deſſus (*art.* 13.) $Sl = \frac{ds^3}{2rdx}$. Donc on aura ici $\frac{ydx - mdx + ndy}{qdx} \times Kl = \frac{ds^3}{2rdx}$; & par conſéquent $Kl = \frac{qds^3}{2r \times ydx - mdx + ndy}$. Mais on vient de ſuppoſer $q = LF = \sqrt{\overline{LB}^2 + \overline{FB}^2} = \sqrt{\overline{y-m}^2 + nn}$.

Donc $Kl = \frac{ds^3}{2r} \times \frac{\sqrt{\overline{y-m}^2 + nn}}{ydx - mdx + ndy}$. Or les triangles (*conſtr.*) ſemblables KlP, KFL, donnant $Pl.lK :: LF.FK$. Et l'angle LFK (*hyp.*) infiniment petit, rendant $LF = FK$, l'on aura de même $Pl = Kl$. Donc $Pl = \frac{ds^3}{2r} \times \frac{\sqrt{\overline{y-m}^2 + nn}}{ydx - mdx + ndy}$. Donc auſſi en ſubſtituant cette valeur de Pl dans la formule générale $f = \frac{4phx Pl}{ds^2}$ des art. 4, 5, 6, & 8. l'on aura enfin $f = \frac{2phds}{r} \times \frac{\sqrt{\overline{y-m}^2 + nn}}{ydx - mdx + ndy}$ pour une Regle infiniment générale de comparaiſon des peſanteurs des corps avec leurs forces centrales, dont le centre ſe-

ro t tout autre que celui des ordonnées de la Courbe qu'il décrit. *Ce qu'il falloit trouver.*

* XLVII. Si preſentement on ſuppoſe que le centre de ces forces centrales devienne le même que celui des ordonnées de la Courbe en queſtion, c'eſt à dire que ces forces tendent toutes ſuivant ces mêmes ordonnées ; ces centres C & F alors confondus en un ſeul & même point, rendant par-là CB (m) & FB (n) nulles, c'eſt à dire $m = o = n$, la précédente Regle générale $f = \frac{2phds}{r} \times \frac{\sqrt{yy - mm} + nn}{ydx - mdx + ndy}$ de l'art. 46. ſe changera pour lors en $f = \frac{2phds}{r} \times \frac{\sqrt{yy}}{ydx} = \frac{2phds}{rdx}$, qui eſt celle qu'on a déjà trouvée pour ce cas-ci dans les art. 9, 14, & 18.

† XLVIII. La Regle du centre des forces différent de celui des ordonnées de la Courbe en queſtion, qu'on vient de trouver dans l'art. 46. en conſidérant les élémens de cette Courbe comme Courbes eux-mêmes, ſe peut encore trouver en les conſidérant comme autant de petites lignes droites ou de côtez infiniment petits du polygone infiniti-latere rectiligne ſous la forme duquel cette Courbe ſe peut auſſi conſiderer.

Pour cela, ſuppoſons preſentement LQ en ligne droite avec le petit côté ZL de ce polygone MLN, qui prolongé vers Q, fera ici une nouvelle tangente LQ ſuivant laquelle la viteſſe de

* *Regles des art. 9, 14. & 19. tirées de la précédente.*

† *Autre démonſtration de la Regle du penultiéme art. 46. tirée preſentement de la conſideration des Courbes ſous la forme de polygones infiniti-lateres rectilignes.*

de rotation en L du corps *decrivant* tendra à l'emporter. Tout le reſte demeurant le même par raport à cette nouvelle tangente que ci-deſſus (*art.* 46.) par raport à l'autre, on trouvera ici non-ſeulement Pl double de ce qu'elle étoit dans cet art. 46. comme l'on a trouvé dans l'art. 17. Fig. 5. Yl double de Pl; mais encore $LP. Pl :: p \times LQ. f \times LP.$ comme l'on a trouvé $LY. LG$ ou $Yl :: p \times LT. f \times LY.$ dans l'art. 18. Fig. 5. en ſuppoſant encore ici LQ double de la hauteur (h) d'où le corps tombant aquieroit en L la viteſſe qu'il y a ſuivant LQ, de même qu'on a ſuppoſé là LT double de cette même hauteur. Donc on aura pareillement ici $LP. Pl :: p \times 2h.$ $f \times LP.$ ou $f = \frac{2ph \times Pl}{LP \times LP} = \frac{2ph \times Pl}{Ll \times Ll}$.

Mais en prenant encore r pour le rayon oſculateur de la Courbe MLN en L, on trouvera de plus ici $Sl = \frac{Ll \times Ll \times Ll}{r \times DL}$ de la même maniére qu'on a trouvé $Xl = \frac{Ll \times Ll \times Ll}{RL \times DL}$ dans l'art. 19. Fig. 5. où cette Courbe étoit pareillement conſiderée ſous la forme de polygone infiniti-latere rectiligne. Donc aiant auſſi en général (*art.* 46.) $Sl = \frac{ydx - mdx + ndy}{qdx} \times Kl$, ſoit que cette Courbe ſoit conſiderée ſous la forme de polygone ou non, l'on aura pour ici $\frac{ydx - mdx + ndy}{qdx} \times Kl = \frac{Ll \times Ll \times Ll}{r \times DL}$ (en appellant encore Ll, ds; $\& LD$, dx) $= \frac{ds^3}{rdx}$. Et par conſéquent $Kl =$

$= \frac{ds^3}{r} \times \frac{q}{ydx - mdx + ndy}$. Or les triangles ſemblables KlP, KFL, donnant $Pl. Kl :: LF. FK$. Et l'angle LFK (*hyp.*) infiniment petit, rendant $LF = FK$, l'on aura de même $Pl = Kl$. Donc $Pl = \frac{ds^3}{r} \times \frac{q}{ydx - mdx + ndy}$ (à cauſe que $q = \sqrt{y - m^2 + nn}$ ſuivant l'art. 46.) $= \frac{ds^3}{r} \times \frac{\sqrt{y - m^2 + nn}}{ydx - mdx + ndy}$. Donc auſſi en ſubſtituant cette valeur de Pl dans l'équation $f = \frac{2phx Pl}{Ll \times Ll} = \frac{2phx Pl}{ds^4}$ trouvée ci-deſſus, la preſente hypothêſe de la Courbe polygone donnera encore la même formule $f = \frac{2phds}{r} \times \frac{\sqrt{y - m^2 + nn}}{ydx - mdx - ndy}$ qui a été trouvée dans l'art. 46. en conſidérant cette Courbe comme faite d'élémens courbes eux-mêmes. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

* XLIX. Puiſque l'article 46. & ce dernier 48. donnent $f = \frac{2phds}{r} \times \frac{\sqrt{y - m^2 + nn}}{ydx - mdx + ndy}$, ſoit que la Courbe MLN ſoit conſiderée ſous la forme de polygone ou non, & que $2p$ eſt (*hyp.*) une grandeur conſtante; les forces centrales dont il s'agit ici, ſeront entr'elles dans l'une & dans l'autre de ces deux hypothêſes, comme les fractions

* *Regle du raport que doivent avoir entr'elles les forces centrales dont le centre ſeroit différent de celui des ordonnées de la Courbe ſur laquelle elles ſe trouvent.*

tions correſpondantes $\frac{hds}{r} \times \frac{\sqrt{y-m^2+nn}}{ydx-mdx+ndy}$.

Mais les hauteurs (h) d'où le corps *décrivant* devroit tomber pour aquerir les viteſſes qu'il a aux différens points de la Courbe qu'il décrit, étant comme les quarrez de ces viteſſes, c'eſt à dire (en prenant v pour le nom de chacun de ces viteſſes, & dt pour celui de chacune des inſtans que le corps *décrivant* employe à parcourir chacun des élémens de la Courbe qu'il décrit) $h = vv = \frac{ds^2}{dt^2}$; ces mêmes forces ſeront auſſi entr'elles comme les fractions $\frac{ds^3}{rdt^2} \times \frac{\sqrt{y-m^2+nn}}{ydx-mdx+ndy}$ correſpondantes.

* L. Pour faire uſage de cette expreſſion du raport que doivent avoir entr'elles les forces centrales dont il s'agit ici, & de la Regle $f = \frac{2phds}{r} \times \frac{\sqrt{y-m^2+nn}}{ydx-mdx+ndy}$ de leur raport aux péſanteurs des corps, trouvée ci-deſſus art. 46. & 48. il eſt à remarquer que ces formules en fourniront encore ſix autres toutes auſſi générales pour le même ſujet que chacune d'elles, en y ſubſtituant les ſix valeurs infiniment générales du rayon oſculateur, qui ſe trouvent dans les Mem. de 1701. pag. 33. & 37. art. 10. & 14. en ſuppoſant pour les trois derniéres l'arc de cercle

* *Maniére de rendre les deux Regles des trois articles précédens* 46, 48, *&* 49. *facilement applicables à toutes ſortes de Courbes où le centre des ordonnées ſeroit différent de celui des forces centrales.*

cercle MG (z) décrit du centre C, & de tel rayon CM (a) qu'on voudra, ainſi qu'on les a ſubſtituées ci-deſſus art. 28. dans la formule $f = \frac{2phds}{rdx}$ des art. 9. 14. & 19. pour en tirer les ſix autres Regles de cet art. 28. Et les ſix qui réſulteront ainſi de l'expreſſion $\frac{ds^3}{rdz^2} \times \frac{\sqrt{yy - mm + nn}}{ydx - mdx + ndy}$ qu'on vient de trouver (*art.* 49.) du raport que doivent avoir entr'elles les forces centrales dont il s'agit ici, ſeront préciſément les mêmes que les ſix qui ſont auſſi pour le même ſujet dans les pag. 46. & 47. art. 23. de ces Mem. de 1701. le ſigne d'égalité n'y ſignifiant qu'égalité de raports. Voici donc ſeulement celles qui réſultent de même de la précédente $f = \frac{2phds}{r} \times \frac{\sqrt{yy - mm + nn}}{ydx - mdx + ndy}$, où le ſigne d'égalité ſignifie égalité de grandeurs, leſquelles ſont ici homogenes, au lieu que là elles ſont hétérogenes.

REGLES DES FORCES CENTRALES

Comparées aux Peſanteurs des corps, plus générales encore que celles de l'article 28.

1°. $f = \frac{2ph\sqrt{yy - mm + nn}}{ydyds} \times \frac{dxdyds + ydsddx - ydxdds}{ydx - mdx + ndy}$.

2°. $f = \frac{2ph\sqrt{yy - mm + nn}}{ydxds} \times \frac{dsdx^2 + ydyddx - ydsddy}{dx - mdx + ndy}$.

3°.

$$3^{\circ}.\ f = \frac{2ph\sqrt{y-m^2+nn}}{yds^2} \times \frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{ydx - mdx + ndy}.$$

$$4^{\circ}.\ f = \frac{2ph\sqrt{y-m^2+nn}}{adyds} \times \frac{2dzdyds + ydsddz - ydzdds}{ydx - mdx + ndy}.$$

$$5^{\circ}.\ f = \frac{2ph\sqrt{y-m^2+nn}}{aydzds} \times \frac{ydsdz^2 + aadydds - aadsddy}{ydx - mdx + ndy}.$$

$$6^{\circ}.\ f = \frac{2ph\sqrt{y-m^2+nn}}{eds^2} \times \frac{dzds^2 + dzdy^2 + ydydds - ydzddy}{ydx - mdx + ndy}.$$

On fera sur ces nouvelles Regles du raport des forces centrales aux pesanteurs des corps, les mêmes réflexions qui se trouvent dans les Mem. de 1701. pag. 47. & 48. art. 24. sur de pareilles Regles du raport de ces forces entr'elles. En voici seulement deux éxemples pour en faire l'usage.

Exemple I.

* LI. Supposons, si l'on veut, que la Courbe proposée MLN soit un cercle dont F soit le centre, auquel tendent toutes les forces centrales (f) du corps L qui le décrit, pendant que les ordonnées LC, lC, concourent à la circonférence de ce cercle. Alors tout le reste demeurant le même que dans l'art. 46. Fig. 11. l'égalité des rayons FC & FL de ce cercle MLN, & FB perpendiculaire sur LC, donnant $BC\ (m) = \frac{1}{2}CL\ (\frac{1}{2}y)$; & par conséquent $m = \sqrt{y-m^2}$.

Raport des forces centrales à la pésanteur d'un corps qui décriroit un cercle dont les ordonnées auroient leur centre à sa circonférence pendant que ces forces auroient leur au centre même de ce cercle. Fig. XII.

$y-m=\frac{1}{4}yy$; & delà $nn=rr-\frac{1}{4}yy$, ou $4nn=4rr-yy$, en prenant r pour le nom du rayon FC de ce cercle MLN : la premiére des Regles du précédent art. 50. ſe changera ici en $f=\frac{2rph}{ydyds}\times\frac{dxdyds+ydsddx-ydxdds}{\frac{1}{2}ydx+ndy}=$ $=\frac{4rph}{ydyds}\times\frac{dxdyds+ydsddx-ydxdds}{ydx+2ndy}$. Et ſi l'on ſuppoſe dx conſtante, c'eſt à dire $ddx=0$, cette Regle ſe changera même ici en $f=\frac{4rph}{ydyds}\times\frac{dxdyds-ydxdds}{ydx+2ndy}$ (à cauſe que cette hypothêſe de dx conſtante, donne auſſi $dds=\frac{dyddy}{ds}$) $=\frac{4rph}{ydyds^2}\times\frac{dxdyds^2-ydxdyddy}{ydx+2ndy}=\frac{4rph}{ydx^2+ydy^2}\times\frac{dx^3+dxdy^2-ydxddy}{ydx+2ndy}$.

Mais la reſſemblance des triangles LCD, BCE, donnera auſſi $BC\,(\frac{1}{2}y).LC\,(y)::EB\,(dn).LD\,(dx)=2\,dn$ ($nn=rr-\frac{1}{4}yy$ donnant $dn=\frac{ydy}{4\sqrt{rr-\frac{1}{4}yy}}=\frac{ydy}{4n}$ poſitif, à cauſe que n & y croiſſent alternativement) $=\frac{ydy}{2n}$. Ce qui dans la preſente hypothêſe de dx conſtante, donne auſſi $ddx\,(0)=\frac{nyddy+ndy^2+ydndy}{2nn}$, dont le dernier terme du numerateur eſt poſitif à cauſe de ces mêmes accroiſſemens alternatifs de n & de y ; d'où réſulte $ddy=\frac{-ndy^2-ydndy}{ny}$ (à cauſe de

$dn=$

$dn = \frac{ydy}{4n}$ $= \frac{-4nndy^2 - yydy^2}{4nny}$ à cauſe de $4nn = 4rr - yy$ $= \frac{-4rrdy^2}{4nny} = -\frac{rrdy^2}{nny}$.

Donc en ſubſtituant ces valeurs de dx & de ddy dans la précédente équation $f = \frac{4rph}{ydx^2 + ydy^2} \times \frac{dx^3 + dx\,dy^2 - ydxddy}{ydx + 2ndy}$ il en réſultera $f = \frac{4rph}{y^3 + 4nny} \times \frac{y^3 + 4nny + 4rry}{yy + 4nn}$ (à cauſe de $4nn = 4rr - yy$) $= \frac{4rph}{4rry} \times \frac{4rry + 4rry}{4rr} = \frac{ph}{r} \times 2 = \frac{2ph}{r}$; ce qui donne ici $f.p :: h.\frac{1}{2}r$. comme dans les art. 26, 32, 35, 40, & 43.

* LII. La même choſe ſe peut encore trouver autrement ſans rien ſuppoſer ici de conſtant que les rayons du cercle *MLN*. En effet aiant trouvé ci-deſſus (*art.* 51.) $f = \frac{4rph}{ydyds} \times \frac{dxdyds + ydsddx - ydxdds}{ydx + 2ndy}$, dont dx, dy, ds, ſont toutes variables; Et les Mem. de 1701. pag. 35. art. 10. nombre 1. donnant alors $r = \frac{ydyds^2}{dxdyds + ydsddx - ydxdds}$, ou $\frac{r}{ydyds} = \frac{ds}{dxdyds + ydsddx - ydxdds}$, à cauſe que le rayon du cercle eſt celui de ſa Dévelopée, laquelle ſe confond toute en ſon centre: la ſubſtitution du ſecond membre de cette égalité pour le premier dans la précédente valeur de f, donnera $f = \frac{4phds}{ydx + 2ndy}$.

Or

* *Autre maniere de démontrer le même raport.*

Or les triangles ſemblables Fbl, lDL, donnent $Ll\ (ds.)\ Dl\ (dy) :: Fl\ (r).\ Fb\ (n) = \frac{r\,dy}{ds}$. Donc en ſubſtituant cette valeur de n dans l'égalité précédente, l'on aura $f = \frac{4phds^2}{ydxds + 2rdy^2}$.

Mais les mêmes triangles Fbl, lDL, donnent auſſi $bl\ (\frac{1}{2}y).\ Fl\ (r) :: LD\ (dx).\ Ll\ (ds) = \frac{2r\,dx}{y}$. Donc en ſubſtituant cette même valeur de ds dans le diviſeur de la derniere valeur de f, l'on aura enfin $f = \frac{4phds^2}{2rdx^2 + 2rdy^2} = \frac{2ph}{r}$. Ce qui donne encore $f.\ p :: h.\ \frac{1}{2}r$. Ainſi qu'on le vient de trouver dans le précédent art. 51. conformément aux art. 26, 32, 35, 40, & 43.

EXEMPLE II.

* LIII. Si l'on veut que la Courbe propoſée MLN ſoit encore un cercle, mais qui ait preſentement le centre C des ordonnées LC, & le centre F des forces du corps *décrivant*, aux extrémitez d'un de ſes diametres ; & que par conſéquent elle ſe confonde ici avec le demi-cercle CBF. Alors cette Courbe aiant $CB\ (m) = CL\ (y)$, ou $y - m = o$, la prémiére des Regles infiniment générales trouvées dans l'art. 50. ſe changera ici en $f = \frac{2nph}{ydyds} \times dxdyds$.

* FIG. XIII. *Quel ſeroit ce raport dans le cas où le centre des forces, & celui des ordonnées du cercle en queſtion, ſeroient aux deux extrémitez d'un même diametre de ce cercle.*

$\frac{dxdyds+ydsddx-ydxdds}{ndy} = 2ph \times \frac{dxdyds+ydsddx-ydxdds}{ydy^2ds}$.

Et ſi l'on ſuppoſe dx conſtant, & par conſéquent $dds = \frac{dyddy}{ds}$, elle ſe changera même en $f = 2ph \times \frac{dxdyds^2 - ydxdyddy}{ydy^2ds^2} = 2ph \times \frac{dxds^2 - ydxddy}{ydyds^2}$.

Mais ſi l'on prend $2r$ pour le nom du diametre CF, l'on aura ici $4rr - yy = nn$, ou $\sqrt{4rr-yy} = n$; ce qui donne $\frac{-ydy}{\sqrt{4rr-yy}} \left(\frac{-ydy}{n}\right) = -dn = -dx$ négatif, à cauſe que n & y croiſſent alternativement, & que EB (dn) ſe confond ici avec DL (dx). Et pour cette même raiſon l'équation réſultante $ydy = ndx$ donnera auſſi $yddy + dy^2 = -dndx = -dx^2$ négatif encore pour la même raiſon, & ſans $nddx$ à cauſe de dx (*hyp.*) conſtante; d'où réſulte enfin $yddy = -dx^2 - dy^2 = -ds^2$.

Donc en ſubſtituant cette valeur de $yddy$ dans la derniére équation $f = 2ph \times \frac{dxds^2 - ydxddy}{ydyds^2}$, l'on aura $f = 2ph \times \frac{dxds^2 + dxds^2}{ydyds^2} = 2ph \times \frac{2dx}{ydy}$ (à cauſe de $dx = \frac{ydy}{n}$) $= 2ph \times \frac{2ydy}{nydy} = \frac{4ph}{n}$.

D'où réſulte $f.\ p :: h.\ \frac{1}{4}n.$ conformément à l'art. 41.

REMARQUE III.

Sur le raport de la Peſanteur aux Forces centrales de différens foyers ou centres.

* LIV. Il eſt auſſi à remarquer que quoique juſ-

* *Regle de comparaiſon des forces centrales dirigées par pluſieurs centres ou foyers, avec la péſanteur du corps où elles ſe trouveroient.*

juſqu'ici nous n'aions conſideré à chaque point de la Courbe en queſtion, qu'une ſeule force centrale dens le corps qui la décrit, la comparaiſon que nous en avons faite avec la peſanteur de ce corps, ſe pourra faire de même avec autant d'autres forces centrales qu'on lui en voudra ſuppoſer à la fois à chaque point de cette Courbe, par le concours deſquelles il l'auroit décrite, en donnant le raport de ces forces entr'elles de chaque foyer aux autres ; & cela de la même maniére que les Regles que nous avons données de ces forces en 1701. nous ont conduit à celles que nous avons données de ces forces concourantes en 1703.

* Pour le voir, ſoit encore une Courbe quelconque *MLN*, mais décrite préſentement à la maniere de M. *Tſchirnhaus*, par le corps *L* mû ſuivant *LN* par le concours de tant de forces centrales qu'on voudra, qui agiſſent toutes à la fois ſur lui ſuivant des lignes qui paſſent par leurs foyers ou centres fixes *A*, *B*, *C*, &c. placez d'abord comme l'on voudra dans le plan de cette Courbe. Soit *ILQ* la tangente de cette même Courbe en tel point *L* qu'on voudra, avec l'arc *Ll* infiniment petit, par les extrémitez duquel ſoient tirées des centres ou foyers *A*, *B*, *C*, &c. les droites *AL*, *Al* ; *BL*, *Bl* ; *CL*, *Cl*, &c. dont *Bl*, *Cl*, prolongées rencontrent la tangente *LQ* en *V*, *S*. Soient auſſi *lK*, *LG*, *LD*, perpendiculaires ſur *AL*, *Bl*, *Cl*, & dont la prémiére *Kl* prolongée du côté de *l*, rencontre en *O* la tangente *LQ*, ſur laquelle ſoient pareillement *lF*, *KT*, *GY*, *DX*, perpendiculaires en *F*, *T*, *Y*, *X*. Soient de plus *RL*, *Rl*, deux des rayons oſculateurs de la Cour-

* FIG. XIV.

Courbe MLN, dont le ſecond prolongé du côté de l, rencontre auſſi en E la tangente LQ. Soient A, B, C, &c. les noms des forces centrales dirigées ſuivant les droites LA, LB, LC, &c. qui paſſent par les foyers ou centres fixes A, B, C, &c.

Cela fait, les triangles rectangles ſemblables LKO, LTK, donneront OL ou Ll. OK ou Kl: LK. TK::A. $\frac{A \times Kl}{Ll}$ effort de la force A ſur le corps L ſuivant TK perpendiculaire (*hyp.*) à LQ. Les triangles rectangles ſemblables LGV, GYV, donneront pareillement VL ou Ll. LG :: VG. YG :: B. $\frac{B \times LG}{Ll}$ effort de la force B ſur le même corps L ſuivant YG perpendiculaire (*hyp.*) à LQ. De même encore les triangles rectangles ſemblables LDS, DXS, donneront auſſi SL ou Ll. DL::SD. XD::C. $\frac{C \times DL}{Ll}$ effort de la force C ſur le même corps L ſuivant XD perpendiculaire encore (*hyp.*) à LQ. On trouvera de même les efforts perpendiculaires à LQ de tant d'autres forces centrales qu'on voudra ſuppoſer agir auſſi ſur le corps L. Donc en retranchant ce que ce corps reçoit ainſi d'impreſſion vers le dehors de ce qu'il en reçoit vers le dedans de la Courbe MLN, perpendiculairement à LQ, & en ſuppoſant que B eſt de la premiére eſpece, & A, C, de la ſeconde, l'on aura ici $\frac{A \times Kl}{Ll} + \frac{C \times DL}{Ll} - \frac{B \times LG}{Ll} \pm$ &c. ou $\frac{A \times Kl + C \times DL - B \times LG \pm \&c.}{Ll}$ pour tout ce que ces forces lui donnent enſemble

ble d'effort ou d'impreſſion perpendiculaire à LQ vers le dedans de cette Courbe dans l'inſtant qu'il parcourt l'élément Ll, en vertu duquel effort il eſt attiré de la tangente LQ ſur cette même Courbe de la valeur de Fl, auſſi perpendiculaire (*hyp.*) à cette tangente, pendant le même inſtant.

Cela étant, ſi l'on prend HL pour la hauteur d'où ce corps tombant en vertu de ſa ſeule peſanteur, aquieroit en L une viteſſe égale à celle qu'il a effectivement ſuivant Ll; il eſt viſible que le temps de cette chute de H en L, ſeroit au temps que ce même corps met à parcourir Ll:: $2HL$. Ll. puiſque cette viteſſe demeurant uniforme, lui feroit parcourir le double de HL dans le temps de cette chute; & qu'à viteſſes égales les eſpaces ſont comme les temps emploiez à les parcourir. Donc en appellant dt l'inſtant que ce corps emploie à parcourir Ll, l'on aura $\frac{2HL \times dt}{Ll}$ pour le temps de ſa chute faite de H en L en vertu de ſa ſeule peſanteur (p). Par conſéquent les eſpaces parcourus par un même corps en vertu de forces conſtantes & continuellement appliquées, telles qu'on ſuppoſe d'ordinaire la péſanteur, & que toute force centrale l'eſt à chaque inſtant, étant (*art.* 10.) en raiſon compoſée de ces forces & des quarrez des temps emploiez à les parcourir, l'on aura ici Fl. HL :: $\frac{A \times Kl + C \times DL - B \times LG \pm \&c.}{Ll} \times dt^2$. $p \times \frac{4HL \times HL \times dt^2}{Ll \times Ll}$. Ce qui donnera $A \times K + C \times DL - B \times LG \pm \&c. = \frac{4p \times HL \times Fl}{Ll}$.

* LV.

* LV. Mais en regardant (ainſi que l'on vient de faire) Fl comme parcourue d'un mouvement accéléré pendant le temps que LF eſt parcourue d'un mouvement uniforme, l'élément Ll décrit par le concours de ces deux mouvemens, doit être ici regardé comme courbe, & comme un véritable arc dans lequel la Courbe MLN eſt baiſée par ſon cercle oſculateur en cet endroit; & par conſéquent comme un véritable arc de cercle dont R ſeroit le centre, & non comme un côté droit de polygone. Ce qui donnera $El = \frac{Ll \times Ll}{2LR}$ comme dans l'art. 9. De ſorte que les triangles (*conſtr.*) rectangles & ſemblables EFl, ELR, donnant $Fl. El :: LR. ER$. Et l'élément Ll rendant $LR = ER$, l'on aura ici $Fl = El = \frac{Ll \times Ll}{2LR}$. Donc en ſubſtituant cette valeur de Fl dans la formule par où finit le précédent art. 54. l'on aura enfin $A \times Kl + C \times DL - B \times LG \pm$ &c. $= \frac{2p \times HL \times Ll}{LR}$. Et par conſéquent en appellant encore HL, h; LR, r; & Ll, ds; l'on aura de même $A \times Kl + C \times DL - B \times LG \pm$ &c. $= \frac{2phds}{r}$ pour une Regle générale de comparaiſon de la peſanteur d'un corps avec tout ce qu'on lui peut imaginer de forces centrales conſpirantes enſemble à lui faire décrire quelque Courbe que ce ſoit, le raport de ces forces entr'elles étant donné de chacun de leurs foyers aux autres, comme dans le

* *Introduction du rayon oſculateur dans la précédente Regle, en conſiderant les élémens des courbes comme courbes eux-mêmes.*

Mémoire du 1. Sept. de 1703. * ces efforts ſe faiſant ici tous ſuivant le plan de la Courbe *MLN* qu'ils font décrire au corps *L*. Et lorſqu'ils ſeront dans des plans différens, cette même Regle en fournira encore une autre toute auſſi générale pour ce cas, en le faiſant revenir à l'autre de la maniére qu'on l'a fait dans ce Mem. du 1. Sept. 1703. Ainſi il n'eſt pas néceſſaire de nous y arrêter davantage, ni d'avertir que le rayon (r) de la Dévelopée de la Courbe *MLN* doit ici être pris par raport à tous les foyers *A*, *B*, *C*, &c. Et le reſte comme dans ce même Mémoire.

† LVI. Si l'on compare cette Analyſe avec celle des art. 5. & 9. on verra qu'elle n'en différe preſque point. La Regle qu'elle vient de nous donner, pourroit ſe trouver de même en ſuivant l'Analyſe des art. 2, 3, 4, & 6. Auſſi lorſque tous les foyers qu'on y ſuppoſe, ſe réduiſent à un ſur le plan de la Courbe en queſtion, cette même Regle du précédent art. 55. ſe change-t-elle en celle de l'art. 9. conclue de ces articles-là. En effet, ſi de tous ces foyers il ne reſtoit que *C*, l'anéantiſſement des autres *A*, *B*, &c. réduiroit cette Regle à $C \times DL = \frac{2phds}{r}$: De ſorte qu'en appellant la force *C*, *f*; & *DL*, *dx*; l'on auroit auſſi $fdx = \frac{2phds}{r}$, ou $f = \frac{2phds}{rdx}$, comme dans cet art. 9.

‡ LVII. La Regle qu'on vient de trouver dans

* *Mem. de* 1703. *pag.* 249.

† *Regle des art.* 14, 19, *&* 47. *tirée de la précédente*

‡ *Autre démonſtration de la Regle du pénultiéme*

dans l'art. 55. en conſidérant les élémens des Courbes comme courbes eux-mêmes, ſe peut encore trouver en les conſidérant comme autant de petites lignes droites ou de côtez infiniment petits des polygones ſous la forme deſquels ces Courbes ſe peuvent auſſi conſidérer.

Pour cela, ſoit encore une Courbe quelconque *MLN* décrite à la maniére de M. de *Tſchirnhaus* par le corps *L* mû ſuivant *LN* par le concours de tant de forces centrales qu'on voudra, qui agiſſent toutes à la fois ſur lui ſuivant des directions qui paſſent par leurs centres fixes *A*, *B*, *C*, &c. placez comme ci-deſſus art. 54. Soient préſentement *ZL*, *Ll*, deux des côtez infiniment petits de ce polygone infiniti-latere, dont le premier *ZL* prolongé en devienne la tangente ſur laquelle je ſuppoſe préſentement *LQ*, enſorte que *LQ* ſoit préſentement ce petit côté lui-même prolongé. Soit auſſi préſentement *lF* un arc de cercle décrit du centre *L* par *l*. Soient encore *LR*, *lR*, les rayons de la Dévelopée de cette Courbe *MLN*. Enſuite après avoir encore fait les droites *AL*, *Al*; *BL*, *Bl*; *CL*, *Cl*; &c. Soient encore auſſi *lK*, *LG*, *LD*, &c. des perpendiculaires aux droites *AL*, *Bl*, *Cl*, &c. ou des arcs de cercles décrits des centres *A*, *B*, *C*, &c. Soit préſentement *DX*, &c. perpendiculaire au petit côté *Ll* de la Courbe.

Cela fait, les triangles ſemblables *LDl*, *DXl*, donneront $Ll.\ DL::Dl.\ XD::C.\ \frac{C\times DL}{Ll}$ effort de la force *C* ſur le corps *L* ſuivant *XD* per-

 pen-

art. 55. tirée préſentement de la conſidération des Courbes ſous la forme de polygones infiniti-lateres rectilignes.

FIG. XIV.

pendiculaire (*hyp.*) à *Ll*. On trouvera de même $\frac{A \times lK}{Ll}$, $\frac{B \times LG}{Ll}$, &c. pour ce que les forces *A*, *B*, &c. font d'efforts perpendiculaires à *Ll* ſur le même corps *décrivant*. Donc en retranchant encore ce que ce corps reçoit ainſi d'impreſſion vers le dehors de ce qu'il en reçoit vers le dedans de la Courbe *MLN*, perpendiculairement à ſon petit côté *Ll*, l'on aura encore ici $\frac{A \times Kl}{Ll} + \frac{C \times LD}{Ll} - \frac{B \times LG}{Ll} \pm$ &c. ou $\frac{A \times Kl + C \times LD - B \times GL \pm \&c.}{Ll}$ pour tout ce que ces forces centrales *A*, *B*, *C*, &c. lui donnent enſemble d'effort perpendiculaire à *Ll* vers le dedans de cette Courbe dans l'inſtant qu'il en parcourt cet élément *Ll*, en vertu duquel effort il eſt encore attiré de la tangente *LQ* ſur cette même Courbe de la valeur de *Fl* pendant cet inſtant, laquelle *Fl* ſe trouvera ici double de ce qu'elle étoit dans les art. 54. & 55. comme l'on a trouvé *Yl* double de *Pl* dans l'art. 17. Fig. 5.

Si l'on regarde préſentement cette force centrale réſultante du concours de toutes les autres *A*, *B*, *C*, &c. vers le dedans de la Courbe *MLN*, comme une force ſimple ſuivant *Fl* perpendiculaire au petit côté *Ll* de cette Courbe conſidérée ſous la forme de polygone infiniti-latere rectiligne, ainſi qu'on fait ici ; & qu'après avoir encore ici ſuppoſé *LQ* double de *HL*, on multiplie cette force par *lF*, & la peſanteur (*p*) du corps *L* par *LQ*: la raiſon qui a donné *LY. LG* ou *Yl* : : *p* × *LT. f* × *LY.* dans l'article 18. Fig. 5. donnera de mê-

même ici $LF.Fl::p\times LQ.\frac{A\times Kl+C\times DL-B\times GL\pm \&c.}{Ll}\times LF$. D'où réſultera $A\times Kl+C\times DL-B\times GL\pm$ &c. $=\frac{p\times LQ\times Fl\times Ll}{LF\times LF}$ (à cauſe de $LQ=2HL$, & de $LF=Ll$.) $=\frac{2p\times HL\times Fl}{Ll}$.

Mais la Courbe MLN conſidérée (ainſi qu'elle l'eſt ici) ſous la forme de polygone infinitilatere rectiligne, donne de plus $LR.\ Ll::Ll.\ Fl=\frac{Ll\times Ll}{LR}$. en prenant encore ici LR pour un des rayons de ſa Dévelopée. Donc en ſubſtituant cette valeur de Fl dans la formule ou équation précédente, l'on aura enfin $A\times Kl+C\times DL-B\times GL\pm$ &c. $=\frac{2p\times HL\times Ll}{LR}$ (en ſuppoſant encore $HL=b$, $LR=r$, & $Ll=ds$) $=\frac{2phds}{r}$ pour la Regle cherchée de tant de forces centrales qu'on voudra faire conſpirer à la deſcription d'une même Courbe quelconque conſidérée comme polygone infiniti-latere rectiligne, laquelle Regle on voit être la même que celle qui a été trouvée dans l'art. 55. en conſidérant cette Courbe comme faite d'élémens courbes eux-mêmes. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

* LVIII. Puiſque les art. 55. & 57. donnent $A\times Kl+C\times DL-B\times GL\pm$ &c. $=\frac{2phds}{r}$, ſoit qu'on conſidére la Courbe MLN ſous la

* *Regle du raport ou des raports que doivent avoir entr'elles les forces centrales à pluſieurs centres ou foyers.*

forme de polygone, ou non ; que $2p$ eſt une grandeur conſtante, & que les hauteurs (h) d'où le corps *décrivant* devroit tomber pour aquerir les viteſſes qu'il a aux différens points de la Courbe qu'il décrit, ſont comme les quarrez de ces viteſſes, c'eſt à dire (en prenant v pour le nom de chacune de ces viteſſes, & dt pour celui de chacun des inſtans que le corps *décrivant* emploie à parcourir chacun des élémens ds de la Courbe qu'il parcourt) $h = vv = \frac{ds^2}{dt^2}$; l'on aura $A \times Kl + C \times DL - B \times GL \pm$ &c. $= \frac{ds^3}{rdt^2}$ pour l'expreſſion de la raiſon que chacune des forces centrales A, B, C, &c. dont il s'agit ici, doit ſuivre pendant ſa variation par les differens points de la Courbe MLN qu'elles font décrire au corps L par leur concours d'action ſur ce même corps, quel que ſoit le raport (*hyp.*) donné de chacune de ces forces à chacune des autres : Et cette expreſſion eſt préciſément la même que celle que j'ai trouvée pour le même ſujet dans les Mémoires de 1703. pag. 250. art. 2. Le ſigne d'égalité ne ſignifiant ici, non plus que là, que des égalitez de raports, & non de grandeurs, puiſqu'elles n'y ſont pas homogenes comme dans les articles précédens.

REMARQUE IV.

Touchant les Forces centrales de différens corps ſur une même ou différentes Courbes, ou d'un même corps ſur des Courbes différentes.

* LIX. Juſqu'ici nous n'avons conſidéré les For-

* *Regle de comparaiſon des forces centrales de différens corps ſur une même ou ſur différentes Courbes, ou d'un même corps ſur des Courbes différentes.*

Forces centrales que d'un même corps quelconque ſur une ſeule & même Courbe auſſi quelconque ; voici préſentement pour de pareilles forces de différens corps ſur une même ou ſur différentes Courbes, ou d'un même corps ſur des Courbes différentes : Voici, dis-je, quelles doivent être auſſi les Regles de comparaiſon de ces derniéres forces entr'elles, & avec les peſanteurs conſtantes de ces corps. Pour cela ſoient,

Les Forces centrales . . . f, F, φ.
de trois corps dont les Maſſes ſoient . . . . . m, m, μ.
Leurs Peſanteurs . . . . p, π, π.
Elémens des Courbes qu'ils décrivent . . . . . ds, $d\sigma$, $d\sigma$.
Viteſſes avec leſquelles ils parcourent ces élémens . . . . u, v, v.
Hauteurs déterminatrices de ces viteſſes . . . . . h, λ, λ.
Rayons oſculateurs de ces Courbes terminez aux élémens précédens . . . . . r, ϱ, ϱ.
Elémens des abſciſſes de ces mêmes Courbes, tels que LD par tout ci-deſſus . . . . . dx, dx, dx.

Cela poſé les articles 9, 14, 18, 47, & 56. donneront $f = \frac{2phds}{rdx}$, & $F = \frac{2\pi\lambda d\sigma}{\rho dx}$.

Ainſi l'on aura déja $f.\ F :: \frac{phds}{rdx}.\ \frac{\pi\lambda d\sigma}{\rho dx}$.

L'on aura auſſi de plus $F.\ \varphi :: m.\ \mu$.

Donc on aura auſſi $f.\ \varphi :: \frac{mphds}{rdx}.\ \frac{\mu\pi\lambda d\sigma}{\rho dx}$.

pour la Regle générale de comparaiſon cherchée,

laquelle eſt aiſée à détailler, quelque différens que les raports des maſſes des corps entr'elles, & de leurs peſanteurs entr'elles, puiſſent être ſuppoſez lorſque ces corps ſont différens, &c. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

Toutes ces Regles ainſi établies, il ne reſte plus (ce me ſemble) qu'à expliquer le Paradoxe marqué à la fin de l'art. 44. *En voici l'éclairciſſement.*

ECLAIRCISSEMENT

Sur le Paradoxe marqué à la fin de l'art. 44.

* LX. Ce Paradoxe a raport à une difficulté qui me fut faite au mois de Février ou de Mars de 1701 par M. L. C. D. L. fort habile en ces matieres. Il trouvoit étrange que les forces centrales qu'on vient de voir par tout ci-deſſus (à quelques cas près marquez dans l'article 22.) être finies, ou de même genre que la péſanteur des corps où elles ſe trouvent, ne leur fiſſent cependant parcourir que des eſpaces infiniment petits du ſecond genre, tels que *Pl*; *Kh*, *Tu*, *Fe*, dans les Fig. 1, 2, 3, 4. ci deſſus art. 10. pendant chaque inſtant qui eſt un temps infiniment petit du premier genre. Cette force finie, diſoit-il, doit faire parcourir un eſpace fini à un corps fini dans un temps fini. Par conſéquent elle doit auſſi lui faire parcourir un eſpace infiniment petit du premier genre dans un temps in-

* *Quelque force centrale finie que ce ſoit, non plus que la peſanteur d'un corps fini quelconque, ne peut par elle-même, c'eſt à dire elle ſeule, lui faire parcourir qu'un eſpace infiniment petit du ſecond genre pendant chaque inſtant, par éxemple, pendant le premier inſtant qu'elle agit ſur lui.*

infiniment petit du premier genre, c'eſt à dire, dans un inſtant. Par exemple, ajoûta-t-il, ſi x eſt l'eſpace fini que cette force fait parcourir à ce corps dans le temps fini t, elle devroit auſſi lui faire parcourir dx dans l'inſtant dt; cependant elle ne lui fait parcourir que ddx pendant cet inſtant: comment concilier cela?

Je lui répondis qu'il en étoit de même de la peſanteur au premier inſtant de chaque chute; & que cela venoit de ce que ſi l'on ſuppoſe l'une & l'autre de ces deux forces comme la même dans tout le temps t dès ſon premier inſtant dt, c'eſt à dire, comme conſtante & toûjours agiſſante ſur ce corps ainſi qu'on le penſe d'ordinaire de la peſanteur; les eſpaces que chacune d'elles lui doit faire parcourir pendant ces temps, doivent être comme les quarrez de ces mêmes temps à commencer dès l'origine de l'un & de l'autre de ces eſpaces, c'eſt à dire:: $tt. dt^2$. Mais dt^2 eſt de même genre que $tddt$; puiſque tous les ddt ſont entr'eux de même genre, & que celui d'entr'eux qui eſt troiſiéme proportionel à t & à dt, donne $tddt = dt^2$. Donc le genre de l'eſpace x que cette force fait parcourir (*hyp.*) pendant le temps t au corps ſur lequel elle agit, doit être au genre de ce qu'elle lui en doit faire parcourir pendant le premier inſtant dt de ſon action ſur ce corps, comme le genre de tt eſt au genre de $tddt$, c'eſt à dire, comme le genre de t eſt au genre de ddt, ou comme le fini à l'infiniment petit du ſecond genre. Donc x étant (*hyp.*) l'eſpace fini parcouru dans le temps fini t en vertu de cette force centrale ſuppoſée finie & la même pendant tout ce temps t que dans l'inſtant dt, ou de la peſanteur ſuppoſée pareillement finie & conſtante;

ſtante ; ddx doit être ce qu'elle en fait parcourir au même corps fini pendant l'inſtant dt. Mais quand ces forces de l'inſtant dt varieroient de quelque maniere que ce fût dans le reſte du temps t, cette variation ne changeant rien à leurs valeurs conſtantes de l'inſtant dt, il eſt viſible qu'elles devroient encore faire faire à ce corps chacune le même eſpace pendant l'inſtant dt, que ſi elles demeuroient conſtantes pendant tout le temps t. Donc quelque variables que les forces centrales ſoient, & quand la peſanteur des corps le feroit auſſi, chacune de ces forces ne feroit encore parcourir que ddx pendant le premier inſtant dt de leur action, c'eſt à dire, un eſpace infiniment petit du ſecond genre à un corps fini dans un temps infiniment petit du premier genre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* LXI. La même choſe ſe peut démontrer encore ſans calcul. Car puiſque la force totale réſultante de l'aſſemblage de tout ce que la peſanteur du corps qui tombe, lui en imprime de nouvelle à chaque inſtant de ſa chute dans un temps fini, ne lui fait parcourir qu'un eſpace fini dans ce temps fini, cette même force totale ne lui doit faire parcourir qu'une infinitiéme ou différentielle du premier genre de cet eſpace dans une infinitiéme de ce temps, c'eſt à dire, dans un inſtant. Donc la peſanteur de ce corps n'étant d'elle-même qu'un infinitiéme de cette force totale faite d'une infinité d'accroiſſemens inſtantanez égaux chacun à cette peſanteur, ne doit plus lui faire parcourir par elle ſeule à chaque inſtant qu'une infinitiéme de cette premiére différentielle d'eſpace fini, c'eſt à dire, ſeulement une différentio-différentielle

ou

* *Autre démonſtration du précédent art. 59.*

ou une ſeconde différentielle de cet eſpace. Par conſéquent auſſi la force centrale d'un corps à chaque inſtant pouvant être regardée comme une eſpece de peſanteur ou de force conſtante de même genre que la peſanteur de ce corps, elle ne doit non-plus lui faire parcourir qu'une différentielle d'eſpace du ſecond genre pendant cet inſtant. *Ce qu'il falloit encore démontrer.*

Puiſque (art. 60. & 61.) *la peſanteur d'un corps fini, priſe comme une force conſtante à la maniére de* Galilée, *ne peut lui faire parcourir qu'une différentielle* (*d'eſpace*) *du ſecond genre, pendant que ſa force de rotation lui en fait parcourir une du premier; il ſuit neceſſairement que ſa peſanteur eſt infiniment petite par raport à ſa force de rotation, quoiqu'on regarde auſſi d'ordinaire cette force de rotation comme une force finie; mais ce ſont deux genres différens de forces finies, comme les lignes, les ſurfaces, & le corps, ſont trois différens genres de grandeurs finies: De même, dis-je, que les corps, les ſurfaces, & les lignes, ſont également appellées des grandeurs finies, quoique les lignes ſoient infiniment petites par raport aux ſurfaces, & les ſurfaces par raport aux corps; De même auſſi les forces de rotation, les peſanteurs, & les forces centrales trouvées ci-deſſus de même genre que les peſanteurs, ſont également regardées comme des forces finies, quoique les deux derniéres ſoient infiniment petites par raport à la premiére: De ſorte que lorſqu'on a dit ci-deſſus* (art. 22.) *qu'il y a des cas où les forces centrales ſe trouvent infinies, on a ſeulement voulu dire qu'elles ſe trouvent alors infinies par raport aux peſanteurs, & de même genre que les forces de rotation. C'eſt ainſi que cela ſe doit entendre dans tout cet Ecrit.*

* LXII. Des articles 60. & 61. ſuit néceſſairement la Solution du Paradoxe de l'art. 44. duquel il eſt ici queſtion. En effet, puiſque ſuivant ces deux derniers art. 60. & 61. une force centrale finie ou de même genre que la peſanteur du corps fini où elle ſe trouve, ne peut faire parcourir à ce corps qu'un eſpace infiniment petit du ſecond genre dans un inſtant, il eſt manifeſte que pour lui en faire parcourir un du premier genre dans ce même inſtant, cette force devroit être infinie par raport à cette peſanteur; puiſque cet eſpace ſeroit infini par raport à l'autre, & que les effets ſont toûjours proportionels aux cauſes. Or c'eſt juſtement ce que font les forces centrales du corps † L aux points T où les touchantes tirées du centre C de ces forces, rencontrent le cercle MLN que ce corps eſt ſuppoſé décrire avec telle variété ou variation de viteſſe qu'on voudra: ces forces (dis je) font parcourir chacune au corps L en T, un eſpace infiniment petit du premier genre dans un ſeul inſtant.

Pour le voir ſoit la ſecante CL infiniment proche de la tangente CT, avec deux autres touchantes LP, $\lambda\pi$, aux points L, λ, où cette ſecante rencontre le cercle, leſquelles touchantes rencontrent la premiére CT en P, π.

Cela fait, il eſt viſible que dans l'inſtant que le corps L, venant de N en T, parcourt l'élément circulaire LT, il parcourroit la tangente LP s'il n'en étoit point empêché par la force centrale qui dans cet inſtant le tire vers C de la valeur de PT; & qu'ainſi PT eſt ce que cette

* *Solution de la premiére partie du paradoxe marqué à la fin de l'art.* 44.

† FIG. XV.

te force lui fait faire alors d'eſpace pendant cet inſtant. Or il eſt viſible auſſi que PT, ici égale à LP, eſt de même genre que LP & LT. Donc la force centripete de ce corps vers C, lui feroit parcourir alors un infiniment petit du premier genre. Par conſéquent ſuivant le commencement de cet article-ci, cette force doit auſſi être pour lors infinie par raport à la peſanteur de ce corps.

On trouvera de même que ce corps allant de M en T, ſa force centrifuge ſuivant CL, doit le repouſſer de la valeur de πT dans l'inſtant qu'au lieu de parcourir la tangente $\lambda\pi$, comme il feroit ſans cette force, cette même force l'oblige de ſuivre λT; & qu'ainſi πT étant encore un infiniment petit du premier genre, cette force centrale doit encore être infinie par raport à la peſanteur de ce corps.

Donc de quelque côté N ou M, que le corps L vienne au point d'attouchement T, ſes forces centrales ſuivant la touchante CT, doivent toûjours être infinies par raport à ſa peſanteur. Et ainſi des Forces centrales tendantes ſuivant les touchantes de toute autre Courbe, conformément à l'article 22. & à la premiére partie du Paradoxe marqué à la fin de l'art. 44.

* LXIII. L'autre partie de ce Paradoxe eſt que quelque changement qu'il arrive en chaque point d'attouchement T, aux forces centrales (f) du corps L, en devenant centrifuges ou centripetes, de centripetes ou de centrifuges qu'elles étoient juſqu'à ce point; ce corps ne ſauroit continuer ſa route ſuivant NTM ou MTN, c'eſt à dire, décrire ſeulement le demi-cercle NTM, tant que le centre C de ces for-

* *Solution de la ſeconde partie du même paradoxe.*

ces (f) ſera hors ce demi-cercle du côté de ſa convéxité.

Pour le voir il faut conſidérer que puiſque le corps * L venant de N en T, n'arrive en ce point d'attouchement T, qu'en ſuivant LT, & ſeulement en vertu du concours d'action de ſon effort ſuivant LP, & de ſa force ſuivant PT; ce corps abandonné à lui-même, au lieu d'aller vers M ſuivant $T\lambda$, continueroit ſa route ſuivant la droite LT prolongée vers ϵ: de ſorte que quelque changement qu'il arrive alors à ſa force centrale (f) tendante ſuivant CT, elle ne portera jamais ce mobile ſur l'arc TM; mais ſur l'arc TX, ſi elle devient centrifuge; ou ſur l'arc TV d'une Courbe qui embraſſera ou paſſera par ce point C, ſi cette force continue d'être centripete.

Par exemple, en ſuppoſant $T\epsilon = LT$, & en faiſant par ϵ la droite $\beta\delta$ parallele à CT; il eſt manifeſte que le corps L parcourroit $T\epsilon$ dans un inſtant égal à celui qu'il a emploié à parcourir LT, ſi toute ſa force centrale ceſſoit en T; & que ſi cette force continue d'être centripete, de quelque valeur de $\epsilon\beta$ qu'elle attire ce corps vers C, il pourſuivra ſa route ſuivant $T\beta$ élément d'une Courbe $T\beta V$ compriſe entre $T\epsilon$ & la tangente CT, puiſque $\beta\epsilon$ & CT ſont ſuppoſées paralleles entr'elles. Au contraire, ſi cette force centrale du mobile L ſe change en centrifuge en T, de quelque valeur de $\epsilon\delta$ qu'elle repouſſe ce corps parallelement à CT, il pourſuivra ſa route ſuivant $T\delta$ élément d'une Courbe $T\delta X$ encore plus écartée de CT, cette Courbe ſe trouvant au-delà de $T\epsilon$.

De même ſi l'on conſidére que le mobile venant

* FIG. XVI.

venant de M en T, n'arrive en ce point d'attouchement T, qu'en ſuivant λT, on verra que ce corps abandonné à lui même ſuivroit la droite λT prolongée vers E, & que quelque changement qu'il arrive là à ſa force centrale, elle ne le portera jamais ſur l'arc TN; mais ſur l'arc TZ ſi elle devient centripete, ou ſur l'arc TY ſi elle continue d'être centrifuge, en le tirant de la valeur de ED dans le premier cas, ou en le repouſſant de la valeur de EB dans le ſecond, le tout ſuivant BD auſſi parallele & infiniment proche de CT. De ſorte que l'arc BY que ce corps décrira dans ce ſecond cas, ſe trouvera entre l'arc TN & la droite TE; & l'arc TZ du premier cas, ſera encore plus écarté de TN, cet arc TZ ſe trouvant en deça de TE.

Donc quelles que ſoient les forces centrales du mobile L, elles ne pourront jamais lui faire parcourir le demi-cercle NTM entier, tant qu'elles auront pour centre un point C pris hors ce demi cercle du côté de ſa convéxité, ſoit que ce corps vienne de N ou de M vers T, ainſi que le porte la ſeconde partie qui reſtoit à réſoudre du Paradoxe marqué à la fin de l'art. 44. Au contraire il ſuit de ce qui vient d'être démontré, qu'en ce point d'attouchement T ce corps, au lieu de ſuivre TM en venant de N vers T, continuera ſa route ſuivant TV ou TX, ſelon que ſa force centrale en T continuera d'être centripete, ou qu'elle y deviendra centrifuge. De même en allant de M vers T, au lieu de ſuivre l'arc TN, ce corps continuëra ſa route par une autre Courbe TY ou TZ, ſelon que ſa force centrale en T continuëra d'être centrifuge, ou qu'elle y deviendra centripete. On voit auſſi que ces Courbes TV, TX,

TX, *TY*, *TZ*, se diverſifieront ſelon les différens raports des Forces centrales du corps qui les décrira. Ce que l'on voit ici du demi-cercle *NTM*, ſe démontrera de même de toute autre Courbe en pareilles circonſtances. *Et c'eſt tout ce qui reſtoit ici à faire voir.*

* SOLUTION

Du Problême propoſé par M. Jacques Bernoulli *dans les* Actes de Leipſic *du mois de Mai de l'année* 1697. *trouvée en deux maniéres par M.* Jean Bernoulli *ſon Frere, & communiquée à M.* Leibniz *au mois de Juin* 1698.

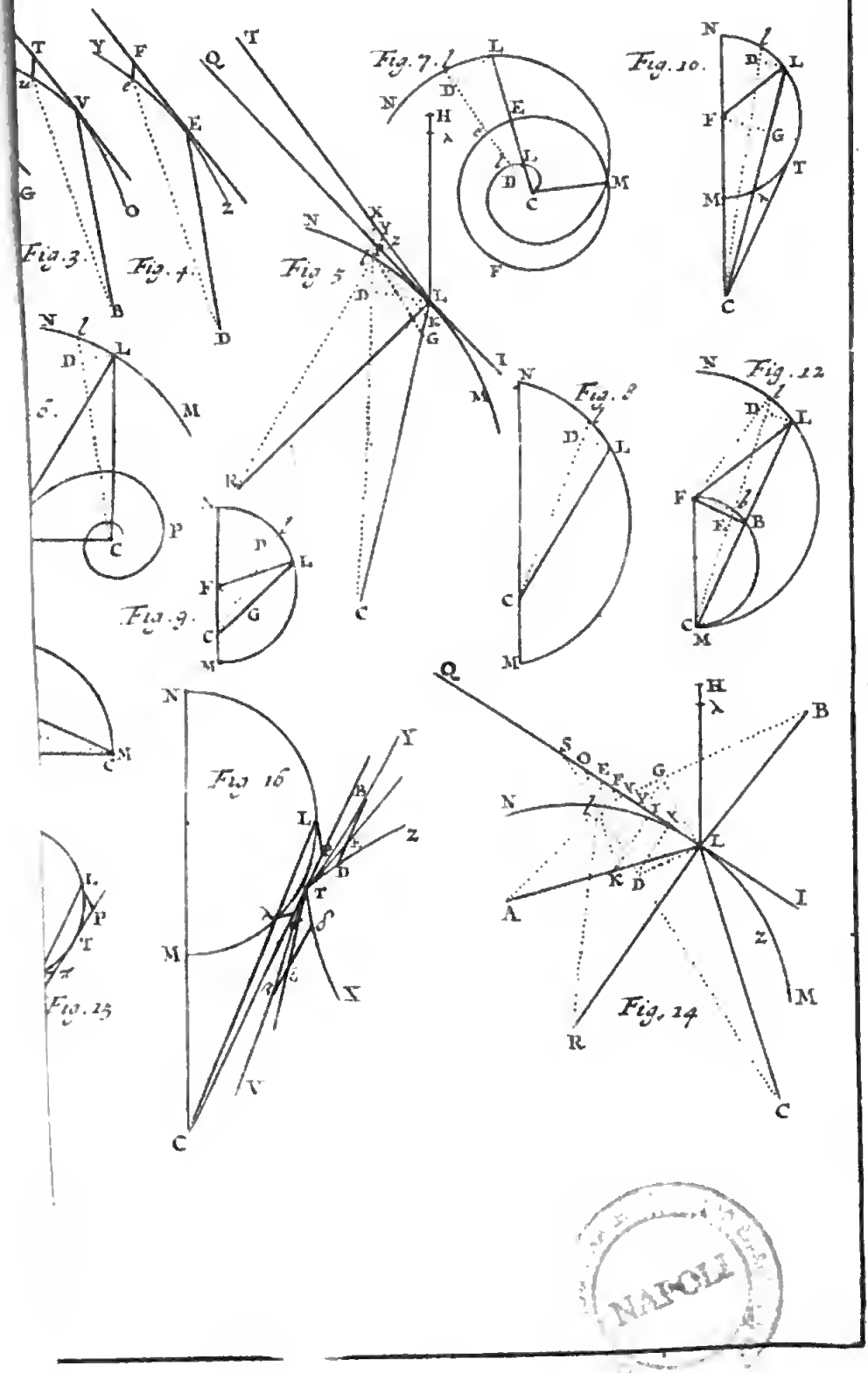
SUR LES ISOPERIMETRES.

PROBLEME I.

† *DE toutes les Courbes iſopérimetres décrites ſur un même axe determiné* BN, *trouver la Courbe* BFN *telle que ſes appliquées* FP *élevées à une puiſſance donnée, ou généralement telle que les fonctions quelconques de ces appliquées, exprimées par d'autres appliquées* PZ, *forment ou rempliſſent un eſpace* BZN *qui ſoit le plus grand de tous ceux qui peuvent être formez.*

* Cette Solution étoit Latine dans un paquet cacheté, préſenté à l'Academie le 1. Fev. 1701. Il n'y fut ouvert que le 17. Avril 1706. & elle n'y fut luë que le 12. Mai ſuivant: cela pour les raiſons qui ſe voient dans l'Hiſtoire.

† FIGURE I.



NAPOLI

mez de la même maniére : ou bien (ce qui revient au même) une Courbe BH, *qui ait pour axe* BG *perpendiculaire à* BN, *étant donnée, déterminer la Courbe* BFN *dont les appliquées* FP *prolongées juſqu'en* Z *enſorte que* PZ *ſoit égale à* GH, *faſſent un eſpace* BZN *qui ſoit le plus grand de tous ceux qui peuvent être formez de la même maniére & compris par d'autres Courbes quelconques décrites ſur* BN *& de même longueur que* BFN.

SOLUTION.

* Que $BF\phi$ ſoit une partie de la Courbe cherchée, & que $BZ\zeta$ ſoit partie de l'autre Courbe engendrée par celle-ci ſuivant les appliquées de la Courbe donnée BH. Je regarde $F0\phi$ élément de la Courbe $BF\phi$, comme compoſé de deux petites lignes droites $F0$, 0ϕ; & de même l'élément $ZL\zeta$ de la Courbe $BZ\zeta$, comme compoſé de deux petites lignes droites ZL & $L\zeta$. Maintenant parceque toute Courbe qui doit donner un *maximum*, conſerve auſſi dans toutes ſes parties les loix de ce même *maximum*, il ſuit que ſi des points F & ϕ on mene deux autres petites lignes droites $F\omega$, $\omega\phi$, leſquelles priſes enſemble ſoient égales à $F0 + 0\phi$, & que de ces lignes on en forme par la même loi $Z\lambda$, $\lambda\zeta$, de même que de $F0$, 0ϕ, on a formé ZL, $L\zeta$; il ſuit, dis-je, que l'eſpace $ZP\pi\zeta\lambda Z$ doit être plus grand que tout autre $ZP\pi\zeta\lambda Z$. Afin donc de trouver la poſition requiſe des petites lignes $F0$, 0ϕ, qui doivent donner ce *maximum*, & delà de trouver la nature de la Courbe $BF\phi$; je conçois que des foyers

* FIG. II.

foyers F, φ, & de la longueur du fil $F0\varphi$, on ait décrit une petite Ellipſe, ſur la circonférence de laquelle les deux points 0, ω, ſoient infiniment proches l'un de l'autre, c'eſt à dire, dont la diſtance 0ω ſoit infiniment plus petite que la diſtance des foyers F, φ, quoique la droite $F\varphi$ ſoit déja infiniment petite par elle-même, étant la ſoûtendante de l'élément $F0\omega\varphi$ de la Courbe $BF\varphi$. Donc par la nature du *maxim.* les deux eſpaces $ZP\pi\zeta LZ$ & $ZP\pi\zeta\lambda Z$ ſeront égaux entr'eux; & en ayant ôté ce qu'ils ont de commun, il reſtera le triangle $ZL\Upsilon$ égal au triangle $\zeta\lambda\Upsilon$; ou bien menant les paralleles $L0$, $\lambda\omega$ (en négligeant les parties infiniment plus petites $L\Upsilon M$ & $\Upsilon\lambda\mu$) le triangle ZLM ſera égal au triangle $\zeta\lambda\mu$, c'eſt à dire qu'ayant mené ZC & ζD paralleles à l'axe $B\pi$, comme auſſi FI & φK, l'on aura $ZC \times LM = \zeta D \times \lambda\mu$. Mais parceque LM eſt la différence des lignes LR, MR, de même que $\lambda\mu$ l'eſt des lignes $\lambda\rho$, $\mu\rho$; & que LR, MR, & $\lambda\rho$, $\mu\rho$, ſont les fonctions des lignes reſpectives $R0$, RT, & $\rho\omega$, $\rho\theta$; il eſt clair que LM repréſentera la différence des fonctions qui ſont entre $R0$, RT; & que $\lambda\mu$ repréſentera de même la différence des fonctions qui ſont entre $\rho\omega$, $\rho\theta$. Il faut bien remarquer que la différence des fonctions de deux lignes comme $R0$, RT, qui ſe ſurpaſſent d'une quantité $T0$ infiniment petite du ſecond genre, ſe trouve en différentiant ſimplement la fonction de $R0$, & en multipliant par $T0$ ce qui en vient, ayant omis les différentielles: Par exemple, ſi RL fonction de $R0$, étoit ſeulement la puiſſance n de la même $R0$, en quoi conſiſte le cas de mon Frere, c'eſt à dire que ſi la Courbe BH étoit

une

une Parabole du dégré n, alors LM ou $\overline{RO}^n - \overline{RT}^n$ seroit $= n\overline{RO}^{n-1} \times TO$. De même si la Courbe BH étoit un cercle dont le rayon fût $= a$, alors LM ou $\sqrt{2a \times RO - \overline{RO}^2} - \sqrt{2a \times RT - \overline{RT}^2}$ seroit $= \frac{a - RO}{\sqrt{2a \times RO - \overline{RO}^2}} \times TO$; & ainsi des autres. Il faut aussi remarquer qu'en général on exprimera les différences des fonctions de RO, RT, par $\Delta RO \times TO$, en prenant Δ pour le signe ou la caracteristique des différences des fonctions où l'on omet les différences des grandeurs dont elles sont fonctions. Donc ayant déja $ZC \times LM = \zeta D \times \lambda\mu$, l'on aura aussi $FI \times \Delta RO \times TO = \phi K \times \Delta\rho\omega \times \theta\omega$.

Maintenant des centres F & φ soient décrits les petits arcs OX, $\omega\xi$, lesquels par la nature de l'Ellipse sont égaux entr'eux. Donc TO est à $\theta\omega$, comme la secante de l'angle XOT ou IFO est à la secante de l'angle $\xi\omega\theta$ ou $K\varphi\omega$. Mais on a aussi $FI. \phi K :: FO \times$ sin. $FOI.$ $\phi\omega \times$ sin. $\phi\omega K$. Donc si à la place de FI, φK, & de TO, $\theta\omega$, on substituë les grandeurs qu'on leur voit ici proportionelles, on aura $FO \times$ sin. $FOI \times \Delta RO \times$ sec. $IFO = \varphi\omega \times$ sin. $\phi\omega K \times \Delta\rho\omega \times$ sec. $K\varphi\omega$. Or par les loix des sinus, tangentes, & secantes, le rectangle fait du sinus de l'angle FOI par la secante de l'angle IFO, est égal au quarré du sinus total, lequel par les mêmes loix est égal au rectangle fait du sinus de $\varphi\omega K$ par la secante de $K\varphi\omega$. Donc $FO \times \Delta RO = \varphi\omega \times \Delta\rho\omega$; ou si pour RO l'on prend son équivalente PF qui lui est jointe par la petite ligne droite FO, & que pour $\rho\omega$ on prenne de même son équivalente

$\pi\varphi$,

$\pi\phi$, l'on aura $FO \times \Delta PF = \phi\omega \times \Delta\pi\phi$; & par conſéquent $\Delta PF. \Delta\pi\phi :: \phi\omega\ (\phi U). FO ::$ ſin. $OF\phi$. ſin. $O\phi F$. Et, *permutando*, ΔPF. ſin. $OF\phi :: \Delta\pi\phi$. ſin. $O\phi F$. Et parceque $F\phi$ eſt la ſoûtendante d'un arc infiniment petit $FO\phi$ de la Courbe $BFO\phi$; & qu'ainſi on peut regarder chacun des angles $OF\phi$ & $O\phi F$ comme la moitié de l'angle de la courbure en F & en ϕ; il ſuit que ΔPF eſt au ſinus de la courbure en F, comme $\Delta\pi\phi$ eſt au ſinus de la courbure en ϕ, c'eſt à dire en raiſon conſtante. Ainſi ce Problême étant ainſi réduit à la pure Analyſe, on peut l'énoncer en cette ſorte.

Trouver la Courbe BFϕ *dont la nature ſoit telle que le ſinus de ſa courbure dans un de ſes points quelconques* F, *ſoit à la fonction différentiée de ſon appliquée reſpective* PF (*aiant négligé la différence de cette appliquée*) *en raiſon conſtante.*

Voici la maniére dont on peut réſoudre ce Problême. Soit * BF la Courbe cherchée, dont l'élément (que l'on prend pour conſtant) ſoit $Fl = dt$, $BP = y$, $PF = x$, $Pp = dy$, $Cl = dx$; ſoit regardée Fm comme la tangente en $F = Fl$, & par conſéquent lFm comme l'angle de la courbure, dont le ſinus eſt lm. Soit enfin le triangle rectangle mnl, dont les côtez mn, nl, ſoient paralleles aux côtez lC, CF, du triangle FCl; l'on aura $mn = ddx$, & $nl = ddy$. De plus à cauſe de ces triangles ſemblables CFl, nml, on aura auſſi $Cl\ (dx)\ Fl\ (dt) :: nl\ (ddy)$. $ml = \frac{dtddy}{dx}$. Mais par la nature de la Courbe, ml eſt à ΔPF en raiſon conſtante. Donc en faiſant $\frac{dtddy}{dx} \cdot \Delta x :: dt.\ a.$ l'on aura cette équa-

* FIG. III.

tion

tion $ady = \Delta x \times dx$. Mais comme $\Delta x \times dx$ est la fonction elle-même differentiée, si l'on intégre, l'on aura la fonction elle-même ou GH. Soit donc cette ligne $GH = X$, aiant aussi pris l'intégrale de l'égalité qu'on vient de trouver, on aura $ady = X \pm c$; ou bien aiant multiplié les parties homogenes par la constante dt, on aura $ady = X\,dt \pm c\,dt$ (il faut bien remarquer que j'entends par c une quantité constante & arbitraire, dont il est permis d'augmenter ou de diminuer l'intégrale d'une différentielle quelconque); & en quarrant de part & d'autre l'on aura aussi $aady^2 = dt^2 \times \overline{X \pm c}^2 = dx^2 + dy^2 \times \overline{X \pm c}^2$, d'où l'on tire enfin $dy = \frac{dx \times X \pm c}{\sqrt{aa - \overline{X \pm c}^2}}$, qui sera l'équation générale de la Courbe cherchée, laquelle deviendra fort simple (il suffit d'en trouver une qui satisfasse) en supposant $c = o$ dans cette équation: car il en résultera $dy = \frac{X\,dx}{\sqrt{aa - XX}}$ l'intégrale sera $y = \int \frac{X\,dx}{\sqrt{aa - XX}}$, suivant laquelle si l'on construit une Courbe, je dis qu'elle sera celle qu'on demande.

Corol. Aiant supposé $c = o$, & conséquemment $ady = X\,dt$, l'on aura $dy.X :: dt.a$. Mais en supposant dt constante, dy est le sinus de l'angle BFP. Donc le sinus de l'angle $BFP.X\,(GH) :: dt.a$. c'est à dire, en raison constante. Mais si BF est la Courbe *Brachystochrone*, & BH la Courbe dont les ordonnées GH expriment les vitesses aux points F, j'ai fait voir * dans le temps, que le sinus de l'angle BFP est à

* *Voyez les* Actes de Leipsic *de* 1697. *pag.* 208. *&c.*

à GH en raiſon conſtante. D'où l'on voit que la Courbe BF a en même temps ces deux proprietez ; puiſqu'elle eſt telle que $\int X dx$ eſt un *maximum*, & en même temps $\frac{\int dt}{X}$ un *minimum*. Mais cette Courbe n'a pas cette proprieté lorſque c n'eſt pas $= 0$.

PROBLEME. II.

Les mêmes choſes étant poſées, ſi l'on ſuppoſe maintenant que *PZ *ſoit comme la fonction donnée de l'arc* BF, *on demande la nature de la Courbe* BFN.

SOLUTION.

Si l'on ſuit la même methode que ci-deſſus, on réſoudra facilement ce Problême. Car le triangle ZLY ſera toûjours égal au triangle $\zeta\lambda\Upsilon$ par la nature du *maximum*, ou $ZC \times LM = \zeta D \times \lambda\mu$. † Mais LM ($LR - MR$) eſt la différence des fonctions des deux arcs $BF0$, BFT; & $\lambda\mu$ ($\lambda\rho - \mu\rho$) la différence des fonctions des deux arcs $BF\omega$, $BF\theta$; & l'on trouvera la différence de ces fonctions de la même maniére que ci-deſſus, en multipliant ſimplement la fonction différentiée (aiant négligé la differentielle de l'arc dont elle eſt fonction) par la différence des deux arcs $BF0$, BFT, c'eſt à dire, par TX. Donc à la place de $ZC \times LM = \zeta D \times \lambda\mu$, il faut écrire $FI \times \Delta BF0 \times TX = \varphi K \times \Delta BF\omega \times \theta\xi$. Maintenant par la proprieté de l'Ellipſe ſuppoſée décrite des foyers F, φ, par le moyen d'un fil $= F0 + 0\varphi = F\omega + \omega\varphi$, les petites lignes $0X$ & $\omega\xi$ ſont égales entr'elles. Donc $TX.\theta\xi ::$ tang.

* FIG. I. † FIG. II.

tang. *IFO*. tang. $K\varphi\omega$. De plus on a encore *FI*. φK :: *FO* × sin. *FOI*. $\varphi\omega$ × sin. $\varphi\omega K$. Donc si à la place de *FI*, φK, & de *TX*. $\theta\xi$, on prend ces grandeurs qu'on voit leur être proportionelles, on aura *FO* × sin. *FOI* × tang. *IFO* × Δ *BFO* = $\varphi\omega$ × sin. $\varphi\omega K$ × tang. $K\varphi\omega$ × Δ *BF*ω. Mais par la proprieté des sinus, tangentes, & secantes, le sinus de *FOI* × tang. *IFO* = sin. total × sin. *IFO*; de même le sinus de $\varphi\omega K$ × tang. $K\varphi\omega$ = sin. total × sin. $K\varphi\omega$. On aura donc *FO* × sin. *IFO* × Δ*BFO* = $\varphi\omega$ × sin. $K\varphi\omega$ × Δ*BF*ω ; ou bien si à la place de *BFO* on prend son équivalente *BF*; & à la place de *BF*ω, son équivalente *BF*φ; l'on aura *FO* × sin. *IFO* × Δ*BF* = $\varphi\omega$ × sin. $K\varphi\omega$ × Δ*BF*φ. Donc sin. *IFO* × Δ*BF*. sin. $K\varphi\omega$ × Δ *BF*φ :: $\varphi\omega$ (φO). *FO* :: sin. *OF*φ. sin. *O*φ*F*. Et, *permutando*, sin. *IFO* × Δ*BF*. sin. *OF*φ :: sin. $K\varphi\omega$ × Δ*BF*φ. sin. *O*φ*F*. en raison constante. De sorte que ce Problême ainsi réduit à la pure Analyse, se peut proposer de cette maniére.

Trouver une Courbe BFφ *de telle nature que le sinus de sa courbure dans un de ses points quelconque* F, *soit au sinus de* IFO × ΔBF *en raison constante.*

Pour résoudre ce Problême soit nommée, comme ci-devant * *BP*, *y*; *PF*, *x*; *BF*, *t*; *Pp*, *dy*; *Cl*, *dx*; *Fl* ou *Fm*, *dt*; & la fonction donnée de l'arc *BF*, *v*; l'on aura $ml = \frac{dtddy}{dx}$. Donc en faisant (selon la proprieté que l'on vient de trouver de la Courbe cherchée) $\frac{dtddy}{dx} \cdot dx \times \Delta v$ $\left(\frac{dx\,dv}{dt}\right)$ :: *dt*. *a*. l'on aura cette équation $\frac{a\,dt\,ddy}{dx^2} = dv$,

* Fig. III.

$= dv$, ou $\frac{adtddy}{dt^2 - dy^2} = dv$, dont l'intégrale eſt $v = \int \frac{adtddy}{dt^2 - dy^2}$, ou (parceque a & dt ſont ſuppoſées conſtantes) $v = \int \frac{ddy}{dt^2 - dy^2}$; laquelle équation exprime la nature de la Courbe qu'on demande.

REMARQUE.

On trouvera avec la même facilité, ſi on le veut, la * Courbe $BF\varphi$ en prenant PZ pour quelqu'autre fonction que ce ſoit, compoſée à volonté des fonctions non-ſeulement de l'arc BF, ou de l'appliquée PF, mais auſſi de toutes les deux enſemble de telle maniére qu'on voudra. Car on en viendra toûjours à cette proprieté que le ſinus de la courbure dans un point quelconque F, eſt à une certaine quantité en raiſon conſtante. Ainſi ce Problême étant réduit à la pure Analyſe, on trouvera facilement l'équation qui exprime la nature de la Courbe cherchée.

On peut auſſi réſoudre de la même maniére le Problême des *Catenaires* & des *Brachyſtochrones*, dont les Solutions s'accordent facilement avec celles que j'ai données & que j'avois trouvées par différentes methodes: ce qui ne contribue pas peu à faire voir l'excellence de celle-ci. Au reſte comme cette methode eſt directe, je vais en ajoûter une indirecte priſe de la preſſion des liqueurs, laquelle donnera préciſément la même ſolution; & cet accord merveilleux de ces deux methodes, tant directe qu'indi-

* FIG. I.

directe, nous assûrera encore de leur certitude.

Soit un linge * *BFN* étendu par une liqueur qui le presse par dessus, dont la pesanteur soit uniforme ou non. Il est clair que ce linge prendra une courbure telle qu'elle permettra à la liqueur de descendre le plus bas qu'il est possible: & cela arrivera lorsque les *gravitations* de toutes les parties de la liqueur jointes ensemble feront un *maximum*. Il faut bien remarquer que je ne dis pas que cela arrivera lorsque le centre de pesanteur de la liqueur sera le plus bas; car on ne peut considérer ici le centre de pesanteur, puisque la courbure *BFN* variant (quoiqu'elle soit isopérimetre) la quantité de liqueur contenue dans cette courbure changera aussi: ainsi le centre de pesanteur n'y seroit pas le même. Que l'on imagine donc maintenant que l'espace *BFN* soit divisé en ses filamens par les appliquées verticales *PF*, *pf*, &c. Et soit la Courbe *BL* dont les ordonnées *GL* expriment les gravitations de la liqueur suivant la hauteur *BG* ou *PF*, c'est à dire, dont les appliquées *GL* & *ED* expriment le raport de ce dont la particule *FC* de la liqueur suivant sa profondeur *PF* pese plus ou est plus pressée par le poids du filament ou de la colonne *PFCp*, qu'une égale particule *MN* suivant la profondeur *PM* n'est pressée par le poids de la colonne *PMnp*: comme donc *LG* exprime la gravitation de la particule *FC*, & de toutes les autres qui sont à la même profondeur, ou qui se trouvent dans la droite *GC* prolongée, de même comme *DE* marque la gravitation de la particule *Mn* & des autres qui se trouvent dans la droite *EM* prolongée; il est clair que toutes ces appliquées prises ensemble, c'est

* FIG. I.

à dire les eſpaces *BLG* & *BDE* marqueront toutes les gravitations (je ne dis pas les peſanteurs) priſes enſemble de toutes les particules qui ſe trouvent dans les colonnes *PFCp*, *PMnp*. Si donc on décrit une autre Courbe *BH*, dont les appliquées *GH* ſoient reſpectivement comme les eſpaces *BLG*, & ſi à *P* on applique *PZ* = *GH*, l'on aura une nouvelle Courbe *BZN* dont les appliquées *PZ* exprimeront la ſomme des gravitations des particules par raport à leurs colonnes reſpectives *PFCp*, & par conſéquent la ſomme des appliquées *PZ*, c'eſt à dire, tout l'eſpace *BZN* repréſentera les gravitations de toutes les parties de la liqueur contenue dans le linge ou la voile *BFN*. Donc puiſque la voile prend une telle figure ou courbure que toutes les gravitations priſes enſemble (c'eſt à dire l'eſpace *BZN*) ſont un *maximum*, il eſt clair que ſi l'on emploioit une liqueur d'une peſanteur continuellement différente, avec cette loi ou condition que *LG*, *DE*, ou les gravitations des particules dans les profondeurs de *F*, *M*, fuſſent dans la raiſon des différentielles des appliquées *GH* (leſquelles dans le Problême de mon Frere marquent les fonctions des mêmes *PF*) il eſt clair, dis-je, qu'alors la courbure du linge ou de la voile ſeroit la même que la courbure que mon Frere m'a propoſée de chercher ſeulement pour les puiſſances de *PF*. Mais je l'ai réſolu ci-deſſus ce Problême par la methode directe pour une fonction quelconque.

Afin donc que je montre l'accord de cette methode directe avec l'indirecte, je vas chercher la nature de la Courbe ou courbure que prend un linge ou une voile chargée d'une liqueur dont la gravitation varie ſuivant le raport que

j'ai

j'ai marqué : que ſi je tombe dans la même équation trouvée ci-deſſus, qui eſt-ce qui oſera douter de l'infaillibilité de ces methodes? Il ſe préſente ici d'abord un cas fort facile, qui eſt lorſque la peſanteur de la liqueur eſt uniforme, ce qui eſt ordinaire, c'eſt à dire lorſque les gravitations LG, DE, ſont entr'elles comme les profondeurs BG, BE; ce qui rend la Courbe BL une ligne droite, & la Courbe BH une parabole ordinaire : alors BFN ſera la courbure ordinaire du linge, ou de la voile, laquelle courbure mon Frere a attribuée à ſon *Elaſtique*, & dont la nature s'exprime (comme je l'ai trouvé autrefois auſſi-bien que mon Frere) par cette équation $y = \int \frac{xxdx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$.

Maintenant ſi dans l'équation générale $y = \int \frac{Xdx}{\sqrt{aa - XX}}$ trouvée ci-deſſus (*Sol. Probl.* 1.) par la methode directe, on met à la place de la fonction générale X, le cas particulier xx que l'on ſuppoſe ici, l'on aura $y = \int \frac{xxdx}{\sqrt{aa - x^4}}$, ou (aiant ſupléé aux termes homogenes) $y = \int \frac{xxdx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$; ce qui fait voir déja en ceci l'accord des methodes.

Si l'on ſuppoſe préſentement pour loi générale de la gravitation de la liqueur que la Courbe BDL ſoit une Courbe quelconque, & qu'on veuille trouver la nature de la courbure de la voile BFN, on le peut faire par la méthode dont je me ſuis ſervi autrefois pour trouver la courbure de la voile enflée par le vent, laquelle conſiſte en ceci que la direction de la preſſion

de la liqueur, qui eſt par tout perpendiculaire à la Courbe, ſoit regardée comme compoſée de deux preſſions collatérales, l'une horizontale & l'autre verticale, & que par l'une & par l'autre priſe ſéparément, on cherche quelle eſt la ténacité requiſe dans le point le plus bas, ou la force avec laquelle la voile dans le point le plus bas eſt étenduë ſuivant la tangente *a*, qui eſt la force abſolue étant conſtante dans quelque point de la courbure que la voile ſoit ſuſpendue, ou (ſi on l'aime mieux) qu'elle ſoit attachée à un clou. Ainſi formant une équation de ce qui viendra, avec une quantité conſtante priſe à volonté, de la maniére que je l'avois fait autrefois pour les funiculaires ou catenaires, on trouvera la même équation que j'ai trouvée ci-deſſus par la methode directe. Cette maniére d'operer, quoique legitime, eſt neanmoins plus longue & n'eſt pas ſi naturelle que cette autre que j'ai découverte depuis peu de temps, & que je vas rapporter ici.

Parceque chaque particule * *Ff* du linge ou de la voile eſt preſſée ſuivant *FI*, qui eſt une direction perpendiculaire à la Courbe, par le poids de la colonne de liqueur qui appuie deſſus, ou par la gravitation de la particule *FC* de la liqueur, laquelle gravitation eſt exprimée par la ligne *LG*, la Courbe ſera la même que celle qui ſe formeroit, ſi je concevois que le fil † *BRFST* fût étendu par des puiſſances $R1$, $F2$, $S3$, $T4$, &c. perpendiculairement appliquées à tous les points *R*, *F*, *S*, *T*, &c. & proportionelles aux appliquées correſpondantes *ED*, *LG*, *VK*, &c. Or je vas montrer d'une maniére facile que cette Courbe, & par conſéquent la courbure du linge, eſt la même que celle

* FIG. I. † FIG. IV.

celle que j'ai trouvée ci-dessus par la methode directe.

Soit la Courbe conçûe comme un polygone d'une infinité de côtez BR, RF, FS, ST, &c. lesquels étant prolongez font des angles aRF, bFS, cST, &c. qui marquent les courbures de la Courbe dans les points R, F, S, &c. Maintenant on sait par les loix de la Méchanique que la puissance $1R$ qui pousse, est à la puissance l qui soûtient, ou (ce qui est la même chose) à la force de la ténacité requise du fil dans un point quelconque moien entre R & F, comme le sinus de l'angle aRF est au sinus de l'angle $BR1$, c'est à dire, au sinus total: de même la puissance qui soûtient en l, est à la puissance $2F$ qui pousse, comme le sinus de l'angle $2Fm$ ou le sinus total est au sinus de l'angle bFS; d'où il est évident que la puissance $1R$ est à la puissance $2F$, comme le sinus de l'angle aRF est au sinus de l'angle bFS. On démontrera de la même maniére que la puissance $2F$ est à la puissance $3S$, comme le sinus de bFS est au sinus de cST; & ainsi de suite. Donc la puissance $1R$ est à la puissance $3S$, comme le sinus de l'angle aRF est au sinus de l'angle cST, & *permutando*, le sinus de l'angle cST est à la puissance $3S$ (KV), comme le sinus de l'angle aRF est à la puissance $1R$ (DE): c'est à dire que le sinus de l'angle de la courbure dans un point quelconque R est à DE que je suppose exprimer la fonction différentiée de BE, en raison constante. Or j'ai prouvé par la methode directe cette même propriété. Donc la courbure du linge ou de la voile chargée de la maniére qu'on le vient de dire, & celle des Isopérimetres, est la même. Donc la methode directe & l'indirecte-

ſe confirment l'une l'autre. *Ce qu'il falloit demontrer.*

DESCRIPTION
D'UNE EXOSTOSE MONTRUEUSE.

PAR M. MERY.

* SUR la fin de l'hyver dernier on amena à l'Hôtel-Dieu un Soldat *Irlandois*, âgé d'environ 40 ans, dont les deux condils *A*, *A*, premiere Fig. *B*, *B*, ſeconde Fig. du femur *C*, formoient par leur dilatation extraordinaire une Exoſtoſe monſtrueuſe, tant par ſa groſſeur que par ſa figure.

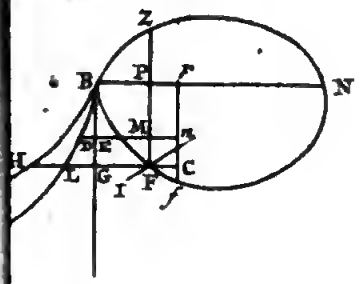
La violente douleur qu'elle cauſoit à ce pauvre malade, le força à me demander avec empreſſement que je lui coupaſſe la cuiſſe; ce que je fis pour apporter quelque ſoulagement à ſes ſouffrances.

Après cette operation, j'examinai à loiſir dans mon cabinet cette monſtrueuſe Exoſtoſe, ſur laquelle je fis les remarques que je vais rapporter.

Premierement, j'obſervai que cette Exoſtoſe ſeparée du corps du femur *C*, & de la jambe; mais recouverte encore des tegumens communs, & des aponevroſes des muſcles qui envelopent le genou, peſoit environ quinze à ſeize livres. Revêtue de ces parties, elle formoit une eſpece de globe, qui avoit 9 pouces de large, ſur 9 ½ de haut: ſa ſuperficie paroiſſoit aſſez égale; mais depouillée de ces parties, elle parut fort inégale & raboteuſe, ſon poids diminua de 4 livres

* 2. Juin 1706.

Fig. 1.ma



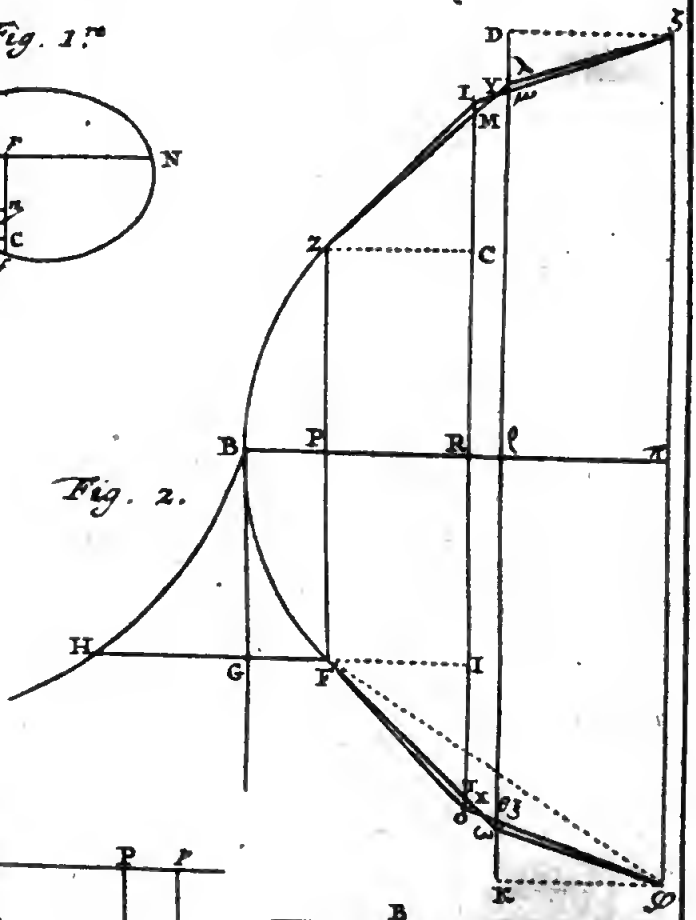


Fig. 2.

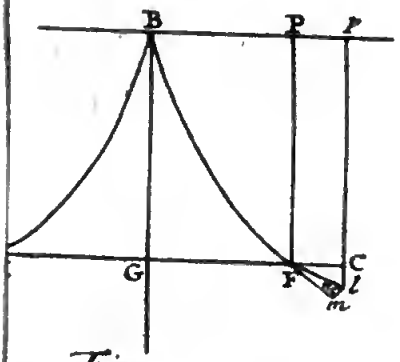


Fig. 3.

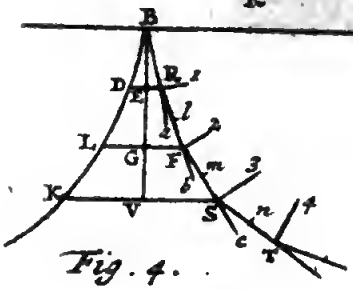


Fig. 4.

BIBLIOTECA NAZIONALE EMANUELE NAPOLI

vres ou environ, ſa largeur fut réduite à 7 pouces $\frac{1}{2}$, & ſa hauteur à 8, comme il paroit dans les deux Figures que l'on en donne à la fin de ce Memoire.

Secondement, je remarquai que tous les tendons des muſcles qui ſervent au mouvement de la jambe, étoient ſi violemment bandez ſur ce globe, que le genou ne pouvoit nullement ſe plier. Cette extenſion extraordinaire n'étoit pas cependant la ſeule cauſe qui empêchât les mouvemens de la jambe. Les deux condils du femur * A, A, B, B. avoient tellement changé de figure, que leur partie convexe étoit devenue plate & même enfoncée † E, E, dans ce globe, de ſorte qu'il étoit abſolument impoſſible qu'elle pût rouler dans la partie concave ſuperieure du tibia. Ces deux cauſes jointes enſemble s'oppoſoient donc également aux mouvemens de la jambe.

Troiſiémement, après avoir enlevé le perioſte qui couvroit cette Exoſtoſe, je m'apperçus qu'elle étoit d'une eſpece particuliere. Les Exoſtoſes communes ne ſont qu'un bourſouflement ou enflure des os mêmes, cauſée par un ſuc trop abondant, qui ſe change en leur ſubſtance ſans ſortir de leurs poroſitez, ou une eſpece de vegetation qui ſe fait de ce même ſuc qui s'en échape, & s'oſſifie entre le perioſte qui couvre les os & leur ſurface exterieure avec laquelle il s'unit, tantôt en ſe confondant avec l'os même, & tantôt en ne faiſant que s'appliquer ſur ſa ſuperficie.

L'Exoſtoſe dont je fais la deſcription étoit differente de celles-ci, en ce qu'elle formoit un globe creux, rempli en dedans d'une matiere

* Fig. I. & II. † Fig. II.

ſemblable à celles des polypes, qui s'engendrent dans le cœur & dans ſes vaiſſeaux ; de ſorte qu'il paroît fort vrai-ſemblable que cette matiere aiant d'abord rompu les fibres oſſeuſes de la partie ſpongieuſe interieure des condils du femur, elle en avoit dilaté enſuite la partie ſolide exterieure.

Mais parceque cette partie ſolide, qui formoit ce globe, étoit percée d'une infinité de trous de figures irrégulieres, & de grandeur fort differente : il y a auſſi bien de l'apparence que les ſels corroſifs, dont cette matiere étoit empreinte, avoient détruit une partie de ce globe, & diſſout les fibres oſſeuſes qui forment par leur aſſemblage les petites cellules des condils du femur ; ce qui donne lieu à cette conjecture, c'eſt que je trouvai un tartre rougeâtre attaché au dedans & au dehors de ce globe, qui en avoit rongé les ſurfaces.

Mais auſſi parceque ce globe oſſeux étant dépouillé de toutes les parties charnues qui le couvroient, & vuide entierement de toute la matiere polypeuſe qu'il renfermoit dans ſa capacité, peſoit étant ſec beaucoup plus que ne peuvent faire (en cet état) les condils du femur du plus grand homme, on ne peut, ce me ſemble, douter qu'une partie de cette matiere n'ait ſervi à ſon augmentation.

* Quatriémement, j'obſervai ſur la ſurface poſterieure de ce globe une rainure *F*, *F*, *F*, fort profonde, dans laquelle paſſoient les arteres & les nerfs qui deſcendoient à la jambe, & les veines qui de cette partie remontoient à la cuiſſe. Cette rainure étoit percée dans ſon fond de pluſieurs trous, par leſquels quelques rameaux

* FIG. II.

meaux de ces vaiſſeaux entroient & reſſortoient de la capacité de ce globe.

* Dans le même endroit je découvris de plus quatre cavernes oſſeuſes, de grandeur & de figure differente. Elles étoient remplies d'une matiere ſemblable à celle qui étoit renfermée dans ce globe. Ces cavernes avoient auſſi pluſieurs ouvertures : par les unes elles communiquoient avec ſa capacité, & par les autres avec les parties membraneuſes & charnues qui couvrent le genou. Leur cavité étoit fort raboteuſe, & paroiſſoit avoir été rongée par la partie tartareuſe de la matiere qui s'y étoit amaſſée.

Cinquiémement, enfin la derniere obſervation que je fis ſur cette monſtrueuſe Exoſtoſe, fut qu'en plongeant un inſtrument dans ſa concavité pour en ôter la matiere polypeuſe qui y étoit renfermée, il ſortit du centre de cette matiere deux palettes ou environ d'une liqueur jaune & fort claire; ce qui me fit croire qu'il y avoit dans le centre de cette matiere une cavité dans laquelle cette liqueur pouvoit être contenue.

EXPLICATION DES FIGURES.

Premiere Figure. Moitié de grandeur & faiſant le quart de cette Exoſtoſe vûe par devant.

A, A. Les deux condils du femur.
C. Le corps du femur.
D. La place de la rotule.
E, E. La place de la partie ſuperieure du tibia.

* FIG. II. 1, 2, 3, 4.

Seconde Figure vûë par derriere.

B, *B*. Les deux condils du femur.
C. Le corps du femur.
E, *E*. La place de la partie ſuperieure du tibia.
F, *F*, *F*. La rainure par laquelle paſſoient les vaiſſeaux de la jambe.
1, 2, 3, 4. Cavernes oſſeuſes en parties ouvertes & en partie fermées.

REFLEXIONS
SUR L'ECLIPSE DU SOLEIL
Du 12 *Mai* 1706.

PAR M. CASSINI.

* JAMAIS Eclipſe n'a eu d'Obſervateurs plus illuſtres que celle du Soleil qui eſt arrivée le 12 de Mai de cette année 1706.

Elle a été obſervée attentivement à *Marli* par le Roi & par les Princes en diverſes manieres, avec divers inſtrumens préparez par des Aſtronomes de l'Academie Royale des Sciences. On l'a vûe directement avec des verres colorez & avec des Lunetes, dont quelques-unes avoient au foyer un reticule qui diviſoit le diſque du Soleil en 12 doits, & avec d'autres Lunetes à deux verres convexes, qui etant placées ſur des machines dirigées au Soleil, envoioient ſon image aſſez grande & aſſez diſtincte ſur un carton oppoſé, où étoit un cercle égal à cette image

* 23 Juin 1706.

ge diviſé par des circonferences concentriques en doits & en demi-doits.

Le Soleil aiant été couvert au commencement de l'Eclipſe, on obſervoit ſes phaſes à meſure qu'il ſortoit des nuages.

Le temps des phaſes étoit marqué par une pendule à ſecondes, reglée le jour précedent & le même jour de l'Eclipſe par l'obſervation des hauteurs du Soleil & de quelques étoiles fixes, & rectifiée par des obſervations ſemblables réïterées à la preſence des Princes.

A l'Obſervatoire Royal, où il y eut un grand concours de Savans & de perſonnes illuſtres par leurs dignitez & par leur rang, on obſerva l'Eclipſe par les mêmes manieres qu'elle fut obſervée à *Marli*, & par d'autres où l'on mit en uſage les inſtrumens plus propres pour les obſervations.

On y emploia la grande Lunete excellente de 34 pieds expoſée ſur la terraſſe, qui avoit au foyer un papier ſur lequel on avoit décrit un cercle égal à l'image du Soleil qu'il recevoit, diviſée en doits par des circonferences concentriques, dont l'exterieure étoit diviſée en 360 degrez pour meſurer la diſtance des cornes pendant la durée de l'Eclipſe; ce qui joint à l'obſervation des doits auroit ſervi à bien déterminer la proportion des diametres du Soleil & de la Lune, ſi quelque agitation de l'air & la foule des ſpectateurs n'en avoit rendu les obſervations un peu douteuſes.

On obſerva avec plus d'exactitude par le Micrometre placé au foyer des Lunetes, dont l'une étoit placée ſur la machine parallatique, & une autre Lunete ſur un autre ſupport convenable. Par ce Micrometre on meſuroit les pha-

ſes de l'Eclipſe quand le Soleil étoit dégagé des nuages, & quand les perſonnes conſiderables qui vouloient voir cette methode d'obſerver ne l'empêchoient point.

La plus grande phaſe de cette Eclipſe, tant à *Marli* qu'à l'Obſervatoire Royal, approcha de 11 doits, à un ſixiême près, comme on peut voir dans le détail des obſervations.

Nous avons depuis eu des relations de cette Eclipſe obſervée en pluſieurs Villes du *Languedoc*, de *Provence* & de *Suiſſe*, & particulierement, à *Narbonne*, à *Montpellier*, à *Arles*, à *Taraſcon*, à *Marſeille*, à *Avignon*, à *Geneve* & à *Zuric*, où cette Eclipſe a été totale avec une durée de quelques minutes d'heure.

En toutes ces Villes l'air s'obſcurcit de ſorte que l'on fut obligé d'allumer les chandelles pour lire & pour travailler, & de quitter le travail à la campagne.

Dans cette obſcurité on vit au Ciel proche du Soleil éclipſé Saturne, Venus & Mercure. A *Arles* où l'Eclipſe totale a duré un peu plus que dans ces autres Villes, on a vû plus loin du Soleil un grand nombre d'autres étoiles comme en pleine nuit.

Le peuple qui en ce jour-là étoit en grand nombre dans les ruës fit des exclamations, & donna des marques d'une grande épouvante.

Les animaux mêmes ſentirent cette Eclipſe. Dans les Villes les oiſeaux nocturnes étant ſortis de leurs trous, voltigeoient dans l'air en grand nombre; les autres oiſeaux s'étant retirez, comme ils ont coûtume de faire pendant la nuit. A la campagne ils montroient avoir de la peine à voler; & étant chaſſez avec des pierres, ils vo-

voloient bas, comme quand ils ſont pourſuivis par des oiſeaux de proye.

Dans toutes ces Villes, au temps de l'Eclipſe totale, on a vû autour de la Lune, qui éclipſoit le Soleil, une couronne d'une lumiere pâle.

A *Narbonne* M. l'Abbé *le Pech* l'a obſervée en forme d'un fil lumineux, diſtinguée en deux anneaux concentriques, dont la lueur étoit neanmoins bien pâle.

A *Montpellier* Mrs *de Plantade*, *Bon* & *Clapiés* virent cette lumiere très-blanche, qui formoit autour du diſque de la Lune une eſpece de couronne de la largeur d'un doit Ecliptique. Dans ces bornes la lumiere conſervoit une égale vivacité, qui ſe changeant enſuite en une foible lueur formoit autour de la Lune une aire circulaire d'environ huit degrez de diametre, & ſe perdoit inſenſiblement dans l'obſcurité.

A *Marſeille* le P. *Laval* & M. *Chazelles* ont obſervé la lumiere qui environnoit immédiatement la Lune de la largeur d'un doit Ecliptique comme à *Montpellier*.

A *Taraſcon* M. le Comte *Marſigli* vit cette lumiere comme une couronne de rayons preſſez enſemble. Il vit auſſi dans la partie occidentale du Ciel des nuages d'une couleur extraordinaire.

Ce n'eſt pas la ſeule fois qu'on a obſervé un ſemblable Phenomene dans les Eclipſes totales du Soleil.

Dans le recueil que le Pere *Riccioli* en a fait dans ſon *Almageſte*, il y en a pluſieurs où l'on a vû un cercle de lumiere autour de la Lune, qui éclipſoit le Soleil.

On a crû que c'étoit un reſte du bord du

Soleil vû directement, en ſuppoſant que c'étoit une Eclipſe annulaire. Une apparence ſemblable à celle qui a été obſervée dans cette derniere Eclipſe, pourroit bien avoir fait juger quelquefois annulaires des Eclipſes du Soleil, qui à la verité étoient totales. On les peut examiner par les Tables des modernes, qui depuis l'uſage de la Lunete donnent la proportion des diametres apparens du Soleil & de la Lune beaucoup plus exacte que les Tables anciennes.

Tycho Brahé qui travailloit à l'Aſtronomie avant l'invention de la Lunete, avoit reglé la proportion de ces diametres de ſorte que ſuivant ſes dimenſions la Lune ne pouvoit jamais cacher entierement le Soleil à la terre. Il auroit donc pû juger qu'un anneau de lumiere ſemblable à celui qu'on a obſervé autour de la Lune en cette Eclipſe étoit le bord même du Soleil qui ne fut point éclipſé entierement, ce que nous ne pouvons pas appliquer à cette Eclipſe, dans laquelle on a diſtingué parfaitement cette lumiere pâle d'avec le bord du Soleil, qui parut avec un grand éclat, auſſi-tôt que ſa moindre partie ſortit de la Lune; & d'ailleurs nous ſavons certainement que le diametre apparent de la Lune étoit plus grand de près de deux minutes que le diametre apparent du Soleil.

Kepler dans ſon Aſtronomie optique attribuë l'apparence de cette couronne autour de la Lune, lorſqu'elle éclipſe entierement le Soleil, à une matiere celeſte qui environne la Lune, & qui eſt d'une denſité capable de recevoir & envoyer vers la terre les rayons du Soleil, & repréſenter cette apparence de l'anneau lumineux. Il ne fait pas difficulté d'accorder à la Lune une eſpece d'atmoſphere analogue à celle qui environne

ne la terre, capable de cauſer de la refraction aux rayons du Soleil. Il examine encore dans ſon Traité de la nouvelle Etoile du Serpentaire d'autres cauſes qui peuvent faire cette apparence, où parlant de la denſité de la matiere celeſte autour de la Lune, il dit qu'elle n'eſt pas toûjours de la même maniere.

Nous avons ſouvent obſervé des Eclipſes de Saturne, de Jupiter & de ſes Satellites, & de quelques Etoiles fixes cauſées par la Lune ſans nous être apperçu d'aucun changement dans ces Aſtres dans leur Immerſion; ce qui nous donna occaſion de juger qu'il n'y avoit pas pour lors d'atmoſphere ſenſible autour de la Lune à l'endroit qui cachoit l'Etoile: mais en quelques-autres obſervations il nous a paru que l'Etoile s'allongeoit un peu en ſe cachant derriere la partie tant obſcure que claire de la Lune; ce qui nous a fait juger que pour lors il y avoit en cet endroit de la Lune quelque matiere denſe capable d'alterer les rayons de ces Aſtres & cauſer ces apparences; ce qui ſeroit aſſez conforme à la penſée de *Kepler*.

Il y a un grand Phenomene dans le Ciel qui nous a perſuadé depuis long-temps qu'il pourroit bien faire paroître une chevelure lumineuſe au Soleil dans ſes Eclipſes totales.

C'eſt cette lumiere répanduë ſur le Zodiaque que nous commençâmes d'obſerver avec admiration au mois de Mars de l'année 1683. Dans le rapport que nous en donnâmes au *Journal* du mois de Juin de la même année, nous jugeâmes *que ſi on avoit pû voir cette lumiere à la préſence du Soleil, elle lui auroit formé peut-être une eſpece de chevelure.*

Voici le cas qui eſt arrivé de la pouvoir voir

à la

à la preſence du Soleil élevé ſur l'horizon, lorſqu'il étoit entierement caché par la Lune dans cette Eclipſe totale. On commença de voir cette couronne lorſque l'air étoit à un tel degré d'obſcurité qu'on pouvoit diſtinguer des Etoiles qu'on ne commence à voir ordinairement qu'à l'heure que nôtre Phenomene eſt prêt de paroître, & lorſque le Soleil eſt aſſez plongé ſous l'horizon pour terminer le crepuſcule.

On peut voir les raiſonnemens que nous avons faits ſur cette lumiere dans le Traité qui eſt inſeré dans le Livre des voyages de l'Academie ſur les obſervations du Printemps de l'an 1683, & ſur celles que nous continuâmes d'en faire dans la ſuite.

On peut voir auſſi ce qui en a été écrit dans la ſuite par M. *Fatio*, auquel nous fîmes voir ce Phenomene à l'Obſervatoire Royal, & qui en continua les obſervations avec une grande aſſiduité & nous les communiqua avec ſes reflexions dans une Lettre qu'il donna depuis au public.

Nous avons ſuppoſé qu'il y a alentour du Soleil une matiere lumineuſe plus denſe proche de cet Aſtre, & plus rare à une plus grande diſtance, où elle eſt facilement effacée par les crepuſcules & par la clarté de la Lune. Dans cette Eclipſe on aura pû voir aiſément la partie de cette lumiere plus denſe qui environne immédiatement le Soleil, comme il eſt arrivé en diverſes Villes. La partie la plus rare qui lui ſuccedoit à une plus grande diſtance du Soleil n'aura pas pû être obſervée aiſément ; neanmoins les Aſtronomes de *Montpellier* qui apporterent une attention particuliere pour voir s'ils

s'ils ne diſtingueroient point nôtre lumiere, remarquerent autour de cette couronne une aire lumineuſe plus pâle qui s'étendoit juſqu'à la diſtance de quatre degrez de côté & d'autre. Le reſte de la lumiere qui s'étend à une diſtance beaucoup plus grande n'aura pas été viſible, à cauſe que l'obſcurité de l'air n'étoit pas aſſez grande pour pouvoir diſtinguer la partie la plus rare qui eſt plus éloignée du Soleil, & qui ne paroît le matin qu'avant que le crepuſcule commence, & le ſoir qu'après qu'il eſt fini. En effet les Obſervateurs de *Montpellier* ont remarqué que cette plus grande obſcurité ne pouvoit être comparée ni à la nuit ni au crepuſcule.

Au reſte nous avons ſuppoſé que cette matiere lumineuſe eſt ordinaire au Soleil, quoiqu'elle puiſſe n'avoir pas toûjours la même étenduë ni le même éclat, & nous avons cherché tous les Memoires que nous avons pû avoir des obſervations d'une apparence ſemblable à celle-ci.

Après avoir rapporté toutes celles que nous avions pû recueillir dans nôtre Traité, nous en avons trouvé encore d'autres, dont la plus évidente parmi les anciennes nous paroît celle qui eſt rapportée par *Samuel Maioli* Evêque de *Volturara* dans ſon Ouvrage des jours Caniculaires, où il dit au Chapitre des Meteores qu'il avoit vû très-ſouvent, particulierement dans les crepuſcules d'Automme, une matiere éclatante & comme ardente en forme d'une colonne, ou d'une poutre, tantôt droite, tantôt oblique.

Aiant donc ſuppoſé cette matiere lumineuſe, on en pourra voir la partie plus denſe qui envi-

vironne immédiatement le Soleil dans les Eclipſes totales, avec quelques differences en divers lieux de la terre, ſuivant la diverſe conſtitution de l'air.

Les obſervations de cette Eclipſe étant comparées au calcul tiré de nos Tables Aſtronomiques, ont fait voir qu'il n'y avoit pas deux minutes de difference entre les temps des phaſes obſervées & le temps des mêmes phaſes calculées, & qu'il n'y avoit que quelques minutes de doit de difference dans la grandeur des phaſes. Aiant corrigé cette difference, nous avons trouvé qu'après cette petite correction, le calcul repréſentoit exactement l'Eclipſe totale, & ſa durée dans les lieux où elle a été obſervée, & qu'elle repreſentoit auſſi avec la même juſteſſe les temps & les phaſes obſervées en d'autres lieux où elle a été partiale. Nous en avons une de *Rome* faite par M. *Bianchini*, une de *Gennes* faite par M. le Marquis *Salvago*, de *Bologne* faite dans l'Obſervatoire de M. le Comte *Marſigli* par Mrs *Manfredi* & *Stancari*, une de *Straſbourg* faite par M. *Eiſenchmid*, une de *Madrid* faite par le Pere *Caſſani*, outre celles de l'Eclipſe totale que nous avons déja rapportées.

Après une ſemblable rectification des hypotheſes, nous avons entrepris de décrire avec la préciſion que l'état preſent de la Geographie le peut permettre les autres lieux où cette Eclipſe a été totale, comme nous fîmes dans l'Eclipſe de l'année 1699, où nous déterminâmes la route de l'Eclipſe centrale ſur la ſurface de la terre, de la maniere qu'elle eſt décrite dans les Memoires de l'Academie de la même année, qui a été depuis verifiée per les obſervations

de

de ces païs-là qui nous ont été communiquées.

On a emploié dans cette recherche la methode que nous avons accoûtumé de pratiquer depuis que nous travaillons à l'Aſtronomie, dont il eſt fait mention il y a près de 50 ans par M. l'Abbé *Giuſtiniani* dans ſon Livre des Auteurs de la *Ligurie*. Il en a été auſſi parlé dans l'Hiſtoire de l'Academie de M. *du Hamel*, & dans les Ouvrages de quelques autres Auteurs auſquels nous l'avons communiquée.

Mon fils & M. *Maraldi* ont trouvé par nôtre methode que cette Eclipſe a commencé de paroître totale au lever du Soleil dans l'*Ocean Atlantique*, au milieu du trajet qui eſt entre l'Iſle de *Cayenne* & les Iſles du *Cap vert*. Enſuite l'Eclipſe parut totale un peu à l'Occident des Iſles du *Cap vert*, l'ombre totale de la Lune aiant parcouru plus de 10 degrez de la circonference de la terre en 4 minutes d'heure. Après elle traverſa les *Canaries*, d'où elle paſſa vers *Cadix*, & parcourut la partie Meridionale de l'*Eſpagne*, paſſant par *Seville*, par *Valence*, par la *Catalogne*. Elle entra enſuite dans le Royaume de *France* par le *Rouſſillon*, & paſſa par la partie Meridionale du *Languedoc*, l'Eclipſe aiant été obſervée totale à *Perpignan*, à *Narbonne*, à *Beſiers*, à *Montpellier* & à *Arles*, où elle a été centrale.

Elle a été auſſi obſervée totale à *Taraſcon*, à *Marſeille*, à *Avignon*, à *Geneve* & à *Zuric*. Elle aura auſſi été totale à *Valence* en *Dauphiné*, à *Grenoble*, dans la partie Orientale de la *Savoye*, à *Sion* dans les *Suiſſes*, à *Ausbourg*, à *Ratisbonne*, dans la *Boheme*, dans la *Pruſſe*, dans la partie Septentrionale de la *Moſcovie*, dans la

gran-

grande Tartarie, & elle aura ceſſé de paroître totale au coucher du Soleil à 150 degrez de longitude & 52 degrez de latitude Septentrionale, l'ombre totale de la Lune aiant parcouru tout cet eſpace de terre compris entre l'*Ocean Atlantique* & la *Tartarie* Orientale en 2 heures 50 minutes.

Les lieux de la terre qui ont été éloignez de la trace décrite par le centre de l'ombre juſqu'à la diſtance d'un degré, c'eſt à dire de 25 lieues vers le Midi & d'autant vers le Septentrion, un peu plus, ou un peu moins, auront eu auſſi l'Eclipſe totale, mais par un moindre eſpace de temps; de ſorte qu'il y aura des lieux qui ne l'auront vûe totale que pendant un inſtant.

La durée de l'obſcurité totale qui a été eſtimée à *Arles* d'environ 6 minutes (quoiqu'en comparant le commencement & la fin de l'obſcurité, où l'on n'a point marqué de ſecondes, elle ne s'y trouve que de 5 minutes) aura été des plus grandes; car l'excès du diametre apparent de la Lune au Soleil diminué par la parallaxe, devoit être parcouru environ en 5 minutes de temps.

Les païs qui ont eu l'Eclipſe centrale auront eu la durée de l'obſcurité totale un peu differente les uns des autres, à cauſe de la difference qui réſulte de la diſtance de la Lune en diverſes heures du jour à diverſes parties de la ſurface de la terre, & diverſes diſtances de la Lune à ſon Perigée, d'où elle s'éloignoit dans cette Eclipſe, outre la difference qui eſt cauſée par la diverſe obliquité des rayons du Soleil à diverſes parties de la terre.

Cette trace que le centre de l'ombre dans l'Eclipſe a parcouru ſur la ſurface de la terre, a croiſé

croiſé obliquement la trace qui fut décrite dans l'Eclipſe centrale du Soleil de l'an 1699, dont on a fait la deſcription dans les Memoires de l'Academie de la même année. On marqua que l'Eclipſe centrale alla du *Groenland* par la partie Septentrionale de l'*Ecoſſe*, par la partie Meridionale du *Dannemark*, par les parties Septentrionales de la *Pomeranie*, entre la *Pologne* & la *Tranſylvanie*, par la *petite Tartarie*, par la *Mer noire*, par l'*Armenie*, par la *Perſe*, par le Royaume de *Mogol*, par les *Indes Orientales* juſqu'aux confins du Royaume de *Siam*, y étant toûjours allée du Nord-Oueſt vers le Sud-Eſt, au lieu que celle de cette année eſt allée du Sud Oueſt vers le Nord-Eſt. Ces deux traces ſe ſont croiſées en *Pologne*.

Nous avons auſſi décrit les lieux où l'Eclipſe de cette année a été de ſix doits, tant du côté du Midi que du côté du Septentrion. Du côté du Midi la phaſe de ſix doits eſt arrivée au lever du Soleil dans la mer, où l'Equinoxial coupe le premier Meridien. Delà elle eſt paſſée par l'*Afrique* ſuivant une ligne qui la traverſe depuis la *Guinée* juſqu'au Golfe de la *Sidre*. Enſuite elle a traverſé la Mediterranée & a paſſé par l'Iſle de *Candie*, par l'*Aſie mineure*, par la *Georgie*, par la *petite Tartarie* & par la partie Meridionale de la *grande Tartarie*.

La phaſe Septentrionale de 6 doits a commencé dans la mer qui eſt entre l'Iſle de *Terreneuve* & les *Açores*, a paſſé par la partie Orientale de l'*Irlande*, à l'Occident de l'Iſle de *Spitberg*, & dans les païs qui ſont proches du Pole Septentrional.

La ligne qui diſtingue les païs Meridionaux qui ont eu un peu d'Eclipſe de ceux qui ne l'ont

l'ont point vûe, paſſe à l'Occident de l'Iſle de *S. Thomé* par la partie Meridionale de l'Egypte, par la partie Septentrionale de l'*Arabie*, & par le milieu de la *Perſe* & du *Mogol*.

Du côté du Septentrion une partie de la penombre tombe hors de la terre.

La difference de 2 à 3 minutes d'heure qui s'eſt trouvée entre les temps des phaſes de cette Eclipſe obſervée à *Paris*, & le temps qui avoit été calculé dans les *Ephemerides* & la *Connoiſſance des Temps*, & la difference de quelques parties de doits qui s'eſt trouvée dans la grandeur de l'Eclipſe ne paroîtra pas conſiderable à ceux qui n'ignorent point la multitude des principes qui concourent à déterminer une de ces Eclipſes, & les obſervations qu'il faut comparer enſemble pour établir chacun de ces principes.

Du côté du Soleil il y a ſa longitude moienne, le lieu de ſon Apogée, ſa plus grande équation, la methode de la diſtribuer par divers degrez de diſtance de l'Apogée pour déterminer ſon lieu veritable, le demi-diametre apparent du Soleil & les regles de ſa variation, ſa parallaxe, ſa refraction ſujette à des irregularitez phyſiques très-difficiles à réduire à quelques regles exactes, & l'obliquité de l'Ecliptique à l'Equinoxial. Il y a auſſi l'équation du temps, qui conſiſte dans la réduction du temps moien au temps veritable, dans laquelle les Aſtronomes modernes different entr'eux de pluſieurs minutes, comme il eſt arrivé même dans cette Eclipſe.

Du côté de la Lune il y a les principes correſpondans à ceux du Soleil que nous venons d'indiquer, & pluſieurs autres équations qui ne con-

conviennent point au Soleil. Une qui dépend de la diſtance du Soleil à l'Apogée de la Lune. Une qui dépend de la diſtance de la Lune au Soleil. Une de la diſtance même du Soleil à ſon propre Apogée, qui ont toutes des regles particulieres de variation, auſſi-bien que le diametre apparent de la Lune & ſa parallaxe, qui font la plus grande diverſité des Eclipſes totales & partiales. Il y a auſſi à déterminer les nœuds de la Lune, leurs moiens mouvemens, leurs équations, l'inclinaiſon de l'orbite de la Lune à l'Ecliptique & ſa variation, d'où dépend la latitude de la Lune.

Du côté de la terre il y a ſon expoſition au Soleil, qui varie à chaque inſtant en des ſens differens par le mouvement journalier ſuivant l'Equinoxial & ſes paralleles, & par le mouvement annuel ſuivant le Zodiaque: les longitudes & les latitudes des lieux dont on veut ſavoir s'il y aura Eclipſe ou non; quelle doit être la difference de ſa grandeur & de ſa durée en differens lieux.

Pour la détermination de chacun de ces principes on emploie differentes hypotheſes ſur leſquelles on peut avoir quelque doute, parcequ'on n'a pas toutes les obſervations qui ſeroient néceſſaires à une détermination préciſe, & celles qu'on a ne ſont pas toûjours faites avec aſſez d'exactitude.

Nonobſtant toutes ces difficultez on a réduit la methode des Eclipſes à un tel état, qu'elle peut ſervir à trouver la longitude Geographique des lieux éloignez où la même Eclipſe a été obſervée avec aſſez de préciſion. Nous en avons fait l'experience dans cette derniere Eclipſe ſur les obſervations qui nous en ont été en-

vo-

voyées de differens lieux. Nous les donnerons ſuivant l'ordre des longitudes des lieux où cette Eclipſe a été obſervée dans un autre Memoire.

SUITE DE L'ARTICLE TROIS DES ESSAIS DE CHIMIE.

PAR M. HOMBERG.

* J'AI propoſé dans mon dernier Memoire la matiere de la lumiere pour mon ſouffre principe, & pour le ſeul principe actif. J'ai prouvé que cette matiere eſt continuellement en mouvement, & qu'elle pénétre ſans ceſſe tous les corps poreux qui ſont dans l'Univers; ce que j'ai crû un attribut neceſſaire du principe actif. J'ai prouvé auſſi que la matiere de la lumiere en pénétrant les corps poreux s'y peut arrêter, les augmenter de poids & de volume; les changer de figure, & joindre differens principes enſemble pour en compoſer des mixtes nouveaux, ce qui eſt le caractere que je donne à mon ſouffre principe; il me reſte maintenant à propoſer une idée vrai-ſemblable de la maniere que la matiere de la lumiere s'introduit & s'arrête dans les autres principes, & comment ces autres principes par-là changent de figure & deviennent des matieres ſulphureuſes, qui ſont la partie active de tous les mixtes.

Il faut ſe ſouvenir ici que nous avons ſuppoſé dans tous les corps non ſeulement des pores qui donnent un paſſage très-libre à la matiere de la lumiere, mais auſſi une partie ſolide, qui eſt pro-

* 30. Juin 1706.

proprement la ſubſtance de chaque corps, contre laquelle la matiere de la lumiere eſt pouſſée continuellement par le Soleil & par les autres flames, & de deſſus laquelle cette matiere reflechit & ne la pénétre que fort difficilement.

Nous devons conſiderer la matiere ſolide d'un corps en deux manieres: La premiere eſt quand nous la regardons comme un corps compoſé, ou ſa ſubſtance entiere, par exemple du bois, de l'argent, &c.

La ſeconde eſt lorſque nous en conſiderons ſeulement les parties integrantes, ou les principes dont ces corps ſont compoſez. Il m'a toûjours paru que les corps pris dans la premiere conſideration ſont dans leur derniere perfection, particulierement les corps organiſez, comme ſont tous les animaux & toutes les plantes, & que pour lors ils ne changent par le frapement de la matiere de la lumiere, que pour redevenir peu à peu des matieres ſimples ou des principes dont ils avoient été compoſez; ce qui arrive toûjours en plus ou moins de temps que la matiere de la lumiere les frape plus ou moins fortement: mais en conſiderant ſeulement les parties dont ces corps ſont compoſez, ils reçoivent continuellement les impreſſions de la matiere de la lumiere qui les change differemment ſelon que cette matiere s'y attache en plus ou en moins de quantité, & qu'elle s'y attache ſuperficiellement, ou qu'elle entre dans la ſubſtance même de ces principes, ce qui leur donne une forme nouvelle, comme nous l'avons remarqué fort ſenſiblement dans l'obſervation que nous avons rapportée dans nôtre dernier Memoire ſur le mercure, dont une partie s'eſt changée en poudre par la ſimple coction qu

peſoit plus qu'elle ne faiſoit avant que d'avoir été miſe ſur le feu, mais qui s'eſt remiſe en mercure coulant quand on l'a expoſé à un très-grand feu. L'autre partie de ce mercure s'eſt fixée tout à fait par une plus forte & plus longue coction en un corps ſolide & metallique, qui ne s'eſt plus remis en mercure coulant quand on l'a expoſé à un très-grand feu, la matiere de la lumiere ne s'étant arrêtée que ſuperficiellement au premier, & étant entrée dans la ſubſtance même de ce dernier mercure. L'application de ce raiſonnement, au fait que nous avons vû dans ce mercure, nous fera concevoir de quelle maniere ce changement lui eſt arrivé, & quelle ſorte de matiere ſulphureuſe en a été produite; ce qui nous donnera en même temps un moyen d'expliquer facilement la production de toutes les autres matieres ſulphureuſes. Nous ſuppoſons d'abord que les parties du mercure ſont de petites goutes fort menues, ou de petits grains ronds & polis, qui gliſſent fort aiſément les uns ſur les autres, ce qui fait ſa fluidité; la matiere de la lumiere pouſſée violemment par le moyen de la flame & pendant long-temps contre ces petits grains qui font la partie ſolide du mercure, elle hache & en dérange peu à peu la ſuperficie, & s'y introduit; & comme elle ne trouve pas un paſſage aiſé pour la traverſer, elle y demeure attachée ſuperficiellement, & y produit de petites éminences qui rendent la ſuperficie de ces petits grains raboteuſe ou heriſſée de ronde & de polie qu'elle étoit, car il faut s'imaginer ces grains de mercure comme lardez de matiere de lumiere, dont les petites éminences corrompent ſenſiblement le poli de ces petits grains; ce qui eſt d'au-

d'autant plus aiſé à accorder, que les petits grains de mercure ſont plus petits qu'il ne faut pour être apperçûs par les yeux, même armez d'un microſcope, & plus petits que les parties de l'air, parceque le mercure paſſe par des endroits où l'air ne paſſe pas; ainſi quelque petite que ſoit la matiere de la lumiere lorſqu'elle s'arrête dans la ſuperficie des parties du mercure, elle en doit changer ſenſiblement la figure.

Les parties du mercure étant ainſi devenues heriſſées par le lardement de la matiere de la lumiere, nous pouvons nous les repréſenter comme des chataignes couvertes de leurs coques vertes & heriſſées, qui ſe ſoûtiennent plûtôt les unes les autres que de couler ſur un plan incliné, comme elles feroient ſi c'étoit des boules rondes & polies; & dans cet état le mercure n'eſt plus fluide, étant changé en une poudre rouge, dont les petits grains collez les uns contre les autres par leurs propres heriſſons, compoſent de gros morceaux aſſez durs & de figures irrégulieres, comme ſeroient les coques heriſſées des chataignes ſi on les preſſoit les unes contre les autres, qui compoſeroient de gros pelotons de figure irréguliere, & qui tiendroient fort bien enſemble: Ces pointes heriſſées du mercure par la longueur du temps qu'on les expoſe au feu s'augmentant en nombre & en grandeur, s'entrelaſſent & ſe ſoûtiennent ſi fort que le mercure devient dur comme une pierre; & comme ces pointes qui rendent chaque grain du mercure heriſſé ſont une matiere ſenſible & peſante, le mercure dans cet état augmente de volume, & peſe plus qu'il ne faiſoit avant que d'avoir été mis au feu, & lorſqu'il étoit encore coulant.

Si on broye ce mercure avec du nouveau mercure coulant, il s'en fait un amalgame comme ſi c'étoit un metal; & en le remettant pendant long-temps à un feu plus violent, la matiere de la lumiere qui s'étoit attachée ſeulement ſur la ſuperficie des petits grains du mercure dans le premier feu, commence au plus grand feu de pénétrer plus avant dans la ſubſtance même de ces petits grains. Si on broye ce mercure pluſieurs fois avec du nouveau mercure coulant, la matiere de la lumiere pénétrera par la forte cuiſſon ſi avant dans les petits grains du mercure, qu'en l'expoſant au feu de fonte, il en reſtera une partie en forme de metal, qui ne changera plus ſenſiblement à quel degré de feu qu'on le mette.

Dans les premieres digeſtions la matiere de la lumiere ne s'attache que ſuperficiellement aux petits grains du mercure, & les envelope peu à peu entierement: elle continue enſuite de fraper ces grains envelopez, & ne pouvant pas toucher en cet état le mercure à nud, mais ſeulement ſon envelope, elle ne fait plus d'impreſſion ſenſible ſur le mercure; enſorte qu'on pourroit le tenir pendant pluſieurs années en digeſtion, ſans qu'il changeât pour cela en aucune maniere: mais en broyant ce mercure digeré & qui eſt devenu poudre par la ſimple cuiſſon, on briſe toutes les envelopes des petits grains du mercure, qui par-là ſe preſentent nuds à la matiere de la lumiere que le feu de la ſeconde digeſtion y peut pouſſer; & comme la premiere digeſtion n'a pas laiſſé d'entamer la ſuperficie de ces petits grains & d'y faire une eſpece de hachure, comme nous l'avons remarqué ci-deſſus, la ſeconde digeſtion pouſſe

ces

ces hachures un peu plus avant, & enſuite envelope encore les grains du mercure : le ſecond broyement dépouillera ces petits grains de leur ſeconde envelope, & une troiſiéme digeſtion enfoncera encore plus avant ces hachures dans les petits grains ou dans la partie ſolide du mercure, juſqu'à ce qu'en réïterant ceci pluſieurs fois, les petites hachures deviennent aſſez profondes pour que la matiere de la lumiere s'y puiſſe loger entierement ; & pour lors la flame étant trop groſſiere pour entrer dans ces petites logettes, elle ne fait que paſſer par deſſus, & la matiere de la lumiere reſte noyée dans ces logettes, ſans qu'aucune autre matiere l'en puiſſe faire ſortir, à moins qu'elle ne fût auſſi petite & même plus petite que la matiere de la lumiere : le mercure dans cet état eſt devenu metal, & la flame n'a plus de pouvoir ſur lui ; & comme il n'y a aucun corps qui ſoit plus petit que la matiere de la lumiere, pour arracher celle qui s'eſt logée dans la partie ſolide du mercure, ce qui ſeroit détruire le metal, il reſte impunément dans le plus grand feu: mais en l'expoſant à un pouſſement très-violent de la matiere de la lumiere par les rayons concentrez du verre ardent, celle qui s'étoit logée dans le mercure s'enfonce davantage & le traverſe, comme un clou eſt chaſſé par un autre, la ſubſtance ſolide du mercure devient criblée & poreuſe, qui prête un paſſage libre à la matiere de la lumiere, & pour lors il n'eſt plus metal, ni même du mercure, mais une matiere terreuſe & legere, comme nous avons remarqué dans nos obſervations ſur le verre ardent.

La matiere de la lumiere qui s'eſt introduite

& attachée au corps du mercure, eſt à ſon égard une matiere étrangere, laquelle conſiderée ſeule & avant que d'être attachée au mercure, eſt une matiere non encore déterminée, que nous avons appellée nôtre ſouffre principe: mais après s'être introduite & attachée au mercure, elle ſe détermine ſouffre metallique, & demeure telle pendant tout le temps qu'elle ſera attachée au mercure; & ſi par quelque operation on la détachoit du mercure, & qu'on l'introduiſit dans quelqu'autre corps qui ne fût pas mercuriel: ce ſouffre metallique changeroit de nature & de nom, & deviendroit un ſouffre vegetal, animal ou bitumineux, ſelon la nature du corps auquel il ſe joindroit, ces transformations ſe pouvant faire fort aiſément, comme nous le verrons ci-après.

Nous appellons ſouffre metallique la matiere de la lumiere ou nôtre ſouffre principe lorſqu'il s'eſt joint ou attaché au mercure, ou à quelqu'autre corps mercuriel que ce ſoit. Nous l'appellons ſouffre vegetal lorſqu'il s'eſt introduit à demeurer dans quelque matiere vegetale. Nous l'appellons ſouffre animal lorſqu'il s'eſt attaché & uni à quelque partie animale; & nous l'appellons ſouffre bitumineux lorſqu'il s'eſt uni à quelque matiere ſimplement terreuſe.

Je ne connois que ces quatre differentes matieres ſulphureuſes, & encore pourroit-on les diſtribuer en trois claſſes ſeulement; parceque le ſouffre vegetal & le ſouffre animal ſe reſſemblent ſi fort, que l'on pourroit n'en faire qu'une ſeule claſſe. Nous ne laiſſerons pas cependant de les diviſer pour avoir des diſtinctions plus préciſes dans le raiſonnement.

L'u-

L'union du ſouffre principe aux matieres animales, vegetales, mercurielles & terreuſes pour produire les differens ſouffres, ſe peut faire immédiatement par le pouſſement du Soleil & par le feu, ou médiatement par la tranſpoſition d'une matiere ſulphureuſe, d'un certain genre dans le corps d'un autre genre; par exemple, l'huile d'olive qui eſt un ſouffre vegetal, faiſant partie de la nourriture de quelque animal, peut devenir de la graiſſe de cet animal, qui eſt un ſouffre animal; & la racine d'une plante ſuçant la matiere graiſſeuſe du fumier, qui eſt un ſouffre animal, ſe changera en une huile vegetale dans la plante, & ainſi des autres.

Les tranſpoſitions des matieres ſulphureuſes d'un genre à un autre ſont aiſées à faire lorſque les ſouffres ſont volatils; mais quand c'eſt un ſouffre fixe, il eſt très-difficile de le changer d'un corps à un autre. Nous appellons une matiere fixe, lorſqu'étant miſe au feu elle y reſte ſans être enlevée par la flame. Nous appellons une matiere volatile, lorſqu'elle ne peut pas ſupporter la violence du feu; & celle-là eſt plus ou moins volatile, ſelon qu'elle eſt enlevée par un degré de feu plus ou moins violent. La maniere comment le feu ou la flame enleve les matieres volatiles, & comment elle laiſſe les matieres fixes, a été expliquée dans l'article 2. de ces Eſſais.

Toutes les matieres ſulphureuſes animales, vegetales & bitumineuſes ſont volatiles; mais les metalliques ſont en partie fixes, en partie volatiles. Dans l'or & dans l'argent il n'y a que du ſouffre metallique fixe, parceque la flame ne ſauroit enlever ces metaux ni en ſeparer le ſouffre. Je ne parle ici que de la flame ſeule-

ment, qui eſt le feu connu dans nos laboratoires, & non-pas des rayons du Soleil concentrez par le verre ardent, qui enlevent auſſi bien l'or & l'argent que les autres metaux, & à l'égard deſquels il n'y a rien de fixe; car la matiere de la lumiere heurte par cette concentration avec une violence extrême contre la partie ſolide des corps, & elle la pénétre promptement, mais c'eſt en la briſant & en la détruiſant; & alors bien loin de compoſer un nouveau mixte, elle réduit ce corps dans les principes les plus prochains dont il étoit compoſé; & ſi on continuë à expoſer ces principes au même feu, ils ſont encore diviſez en principes plus ſimples dont ces premiers étoient compoſez, ce qui n'arrive jamais au feu de la flame.

Je dis donc que nous ne connoiſſons de ſouffre fixe que celui qui ſoûtient les efforts de la flame, & qui n'eſt que d'une ſeule ſorte; ſavoir, le ſouffre metallique fixe, qui ſe trouve pur dans l'or & dans l'argent, & mêlé de differens ſouffres volatils dans les autres metaux, qui ne laiſſent pas d'être metalliques quoique volatils, parcequ'ils ſont propres à ces metaux, & cependant differens dans chacun d'entr'eux.

Nous appellons encore ſouffre metallique volatil celui qui s'attache ſuperficiellement au mercure par les longues digeſtions, parceque le grand feu l'en ſepare: mais ſi par une plus longue ou par une plus forte cuiſſon, ou par quelqu'autre induſtrie ce ſouffre volatil a pénétré juſques dans l'interieur & dans la ſubſtance même du mercure; alors il ne peut plus être enlevé par la flame, le mercure devient metal, & ſon ſouffre volatil ſe change en ſouffre fixe metallique.

que, enſorte que la difference du mercure qui eſt devenu metal, & celui qui a été précipité ſeulement par lui-même, conſiſte en ce que dans ce dernier la matiere de la lumiere s'eſt attachée ſuperficiellement aux petits grains du mercure, ou elle s'eſt changée en un ſouffre metallique volatil, qui s'en ſepare fort aiſément par le feu, en remettant le mercure dans ſa premiere forme liquide: mais quand le mercure eſt devenu metal, la matiere de la lumiere a pénétré dans la ſubſtance même du mercure, & par-là elle eſt devenuë un ſouffre fixe metallique qui ne quitte plus le mercure quelque grand feu qu'on lui donne, le conſervant toûjours dans la forme de metal; & ſelon la quantité du ſouffre fixe qui s'y eſt arrêté, le metal eſt plus ou moins peſant, c'eſt à dire, eſt or ou argent. De ſorte que la ſeule difference qu'il y a entre l'or & l'argent, eſt que l'un eſt du mercure qui dans ſon interieur contient beaucoup de ſouffre metallique fixe, c'eſt à dire en plus grande quantité qu'il ne lui en faut pour être ſimplement métal; & que l'autre eſt du mercure qui dans ſon interieur contient peu de ſouffre metallique fixe, c'eſt à dire autant ſeulement qu'il lui en faut pour devenir metal.

Nous voions par-là que les parties qui compoſent l'or & l'argent ne ſont que du mercure & du ſouffre fixe, ce qui eſt une compoſition fort ſimple; au lieu que la ſubſtance des autres metaux conſiſte en un aſſemblage de pluſieurs matieres, dont la baſe neanmoins eſt du mercure avec très-peu de ſouffre metallique fixe, mais qui ſont accompagnez de differens ſouffres metalliques volatils, des ſouffres bitumineux, des differentes terres & des matieres ſalines, qui

ſont des compoſitions très-compoſées, dont les parties de differentes configurations ne pouvant pas ſe joindre fort étroitement, ſont par conſéquent de peu de durée dans le feu, & dont la production artificielle ſeroit d'autant plus difficile que celle de l'or & de l'argent, que la compoſition des uns eſt plus ſimple que celle des autres.

Nous avons vû que les ſouffres metalliques fixes ou volatils ne ſont que la matiere de la lumiere jointe plus ou moins étroitement au mercure; mais tous les autres ſouffres ſont des compoſitions beaucoup plus amples. J'ai fait les analyſes du ſouffre commun, du Petrole, du ſouffre de *Quito*, du Jayet, des charbons de terre & des differens ſuccins, qui ſont les ſouffres bitumineux les plus connus; j'y ai toûjours trouvé beaucoup de terre, beaucoup de ſel volatil acide, une quantité conſiderable de matiere aqueuſe, & une huile très-pénétrante, laquelle aiant été analyſée encore, s'eſt réduite en beaucoup d'eau, en un peu de terre & en un peu d'huile, laquelle par pluſieurs operations réïterées s'eſt enfin tout à fait diſſipée, laiſſant à chaque fois un peu des autres principes dont ces huiles étoient compoſées: le ſouffre principe, ou la matiere de la lumiere qui étoit entrée dans la compoſition de ces ſouffres, ſe perdant à la fin entierement par les analyſes, comme une matiere qui ceſſe de nous être palpable & ſenſible quand elle eſt dégagée des autres principes plus materiels, comme nous l'avons remarqué dans le commencement de cet article.

J'ai fait auſſi les analyſes des huiles diſtillées eſſentielles & fœtides des plantes, de leurs graiſ-

ſes

ſes & huiles exprimées, & de differens ſucs réſineux, qui ſont des matieres ſulphureuſes vegetales. J'ai fait auſſi les analyſes de differentes parties des animaux qui contiennent les matieres ſulphureuſes animales, dont les operations ſouvent réïterées ont entierement diviſé les huiles en beaucoup d'eau, en ſel & en terre comme dans les matieres bitumineuſes, perdant pareillement & par les mêmes raiſons leur ſouffre principe dans toutes ces operations analytiques; enſorte que les matieres ſulphureuſes tant animales & vegetales que bitumineuſes, ſont toûjours compoſées de quatre matieres; ſavoir, d'eau, de ſel, de terre & de ſouffre principe, au lieu que le ſouffre metallique n'eſt compoſé que de deux matieres ſeulement, ſavoir, de mercure & de ſouffre principe, à moins qu'on ne vueille dire que le mercure ſoit auſſi compoſé de matieres plus ſimples, ce que nous n'avons pas encore pû découvrir, & comme nous avons remarqué dans les metaux que les plus ſimples ſont les plus parfaits, nous pourrions bien dire auſſi que parmi les ſouffres les plus ſimples ſont les plus parfaits & les moins alterables, ce que les experiences confirment; car la flame qui détruit tous les autres ſouffres, ne ſauroit faire aucune impreſſion ſenſible ſur le ſouffre metallique fixe : mais ſi la fixité du ſouffre metallique & ſon peu de ſujétion au changement eſt une perfection en ſoi, ce doit être un défaut à l'égard de nous; car la facilité de changer & de diſſoudre les autres ſouffres nous les rend familiers & utiles, tant pour nos nourritures que pour nos remedes, au lieu que le ſouffre fixe eſt encore tout à fait inabordable à la plûpart des hommes, même

aux plus ſavans Phyſiciens, ce qui eſt un très-grand dommage pour la matiere medicale.

L'introduction de la matiere de la lumiere dans les autres principes, dont les vegetaux, les animaux & les bitumes ſont compoſez, eſt à peu près la même que celle qui ſe fait dans le mercure: mais comme les parties de ces autres principes ne ſont pas ſi fines ni ſi compactes ou ſolides que celles du mercure, la matiere de la lumiere les pénétre plus aiſément & en moins de temps; mais elle ne s'y joint pas ſi étroitement qu'au mercure, à peu près comme un clou eſt fort aiſément enfoncé dans une pomme ou dans une citrouille, & beaucoup plus difficilement dans un ais de chêne: mais auſſi quand le clou y a été une fois enfoncé à coups de marteau, il en eſt difficilement retiré, au lieu qu'on le retire ſans peine de la pomme ou de la citrouille; ce qui fait que toutes ces matieres ſulphureuſes-là ſont non-ſeulement volatiles, mais auſſi fort aiſément détruiſibles par le feu, c'eſt à dire que la matiere de la lumiere s'en ſepare ſans beaucoup de peine, laiſſant les autres principes dans le même état qu'ils étoient avant que de les avoir pénétré.

Les ſels reçoivent avec beaucoup d'avidité les ſouffres, mais c'eſt ſans les changer de nature, en quoi leur tranſpoſition eſt differente de celles dont nous venons de parler, c'eſt à dire qu'un ſouffre animal, par exemple, tranſplanté dans une matiere ſaline n'eſt pas changé en un ſouffre bitumineux ou autre, il demeure le même, mais il caracteriſe le ſel auquel il ſe joint; & comme les ſouffres volatils changent aiſément de nature, ſi par quelque accident le ſouffre, par exemple, qui aura caracteriſé le

ſel

ſel commun, ſe peut changer en celui qui caracteriſe le ſalpetre, le ſel commun deviendra ſalpetre, & ainſi des autres; enſorte que la difference des ſels ne conſiſte que dans les differens ſouffres qui les accompagnent. Nous en avons parlé amplement dans l'article du ſel principe.

Toutes les matieres ſulphureuſes bitumineuſes, vegetales & animales ſont inflammables; ce qui a donné occaſion à la fauſſe idée, que ces matieres ne ſont ſulphureuſes, que parce qu'elles ſont inflammables: mais quand on conſiderera que parmi ces matieres il y en a qui ſont plus inflammables les unes que les autres, & qu'elles le ſont plus ou moins ſelon que dans leur compoſition il eſt entré plus ou moins de ſel acide, nous comprendrons aiſément que l'inflammabilité n'eſt pas le caractere du ſouffre, mais du mêlange d'une matiere huileuſe quelconque avec un ſel acide; ce qui ſe prouve ſenſiblement par la compoſition des matieres réſineuſes artificielles. Par exemple, mêlez de l'huile de giroffle avec de l'eſprit de nitre dans les forces & dans les doſes requiſes, il en réſultera une réſine qui ſera incomparablement plus inflammable que n'étoit l'huile de giroffle, ou l'eſprit de nitre dont cette reſine eſt compoſée; cette grande inflammabilité ne provient donc pas de l'une de ces deux matieres ſéparément priſe, mais de leur mêlange.

La décompoſition des matieres ſimples fort inflammables nous confirme la même choſe, le ſouffre commun prend feu ou s'enflamme à l'approche d'une petite étincelle de feu: mais quand on en a ſeparé la partie acide, comme je l'ai montré dans nos Memoires de

l'année 1703. * la partie huileuſe qui reſte dépouillée de ſon acide, ne brûle plus, même quand on la met dans la flame d'une chandelle, elle ne fait que petiller, & pour la faire brûler il la faut mettre ſur des charbons fort ardens. Le phoſphore de l'urine eſt de toutes les matieres inflammables celle qui s'enflamme le plus aiſément, puiſqu'elle prend feu par un ſimple frotement très-leger: mais quand on en fait l'analyſe, on trouve qu'il ſe ſepare en une liqueur aqueuſe très-acide, comme ſeroit l'eſprit de vitriol, & en une matiere terreuſe jaunâtre & un peu graſſe, dont la premiere n'eſt point du tout inflammable, & la ſeconde ne brûle qu'avec peine. La plûpart des matieres ſulphureuſes metalliques, même des volatiles, ne ſont point du tout inflammables; de ſorte que la propoſition ſeroit bien vraie de dire que toutes les matieres inflammables ſont ſulphureuſes, mais non-pas celle que toutes les matieres ſulphureuſes ſont inflammables.

Nous avons remarqué que tous les ſouffres non metalliques, comme la graiſſe, le ſang & la moëlle dans les animaux, les huiles, les gommes & les réſines dans les plantes, &c. ſont compoſez de ſel, d'eau, de terre & d'huile: mais quand on conſiderera que toutes les autres parties des animaux, des plantes & des bitumes ſont pareillement compoſez de ces mêmes quatre matieres-là, ce ſera un ſurcroit de preuve que le ſouffre eſt le ſeul principe actif qui ſe trouve dans tous ces trois genres de corps, puiſque la matiere huileuſe, qui en eſt le ſouffre particulier, non ſeulement ſe trouve

* Pag. 36. *& ſuiv.*

ve dans toutes les parties des animaux, des vegetaux & des bitumes, mais auſſi que la matiere huileuſe elle-même comprend ces autres trois principes & en eſt compoſée, ce que l'on ne ſauroit dire des autres principes. Cette compoſition peut être variée infiniment ; car la ſubſtance d'un corps compoſé ne conſiſtant que dans l'aſſemblage des matieres dont il eſt compoſé, ſi l'on change cet aſſemblage, ou en rangeant les parties autrement, ou en augmentant quelques unes de ces parties, dont la combinaiſon eſt infinie, il eſt conſtant que le changement de la ſubſtance de ces corps pourra être infini auſſi.

La matiere de la lumiere, en produiſant les matieres ſulphureuſes, s'introduit dans la ſubſtance des corps, en change l'arrangement des parties & les augmente, & par conſéquent elle change la ſubſtance même de ces corps en autant de façons qu'elle ſe peut differemment placer & en differente quantité, ce qui fait une varieté infinie; de ſorte que ſi on vouloit comparer la varieté des matieres qui exiſtent à celle qui pourroit être par toutes les combinaiſons poſſibles, nous ſerions obligez de dire, que l'Univers connu n'eſt que très-peu de choſe en comparaiſon de ce qu'il pourroit être, & même s'il y avoit pluſieurs Mondes comme le nôtre, ils pourroient être tous differemment garnis d'objets ſans changer la matiere, ni la maniere dont ces objets ſeroient compoſez ; ce qui marque une richeſſe & une puiſſance infinie de l'Etre qui a produit l'Univers.

DU

DU MIEL
ET DE
SON ANALYSE CHIMIQUE.

PAR M. LEMERY.

*IL n'eſt pas neceſſaire que je traite ici de l'origine du Miel : tout le monde ſait aſſez que c'eſt une ſubſtance ſucrine que les Abeilles ramaſſent des fleurs de diverſes plantes, & qu'elles portent dans leur ruche pour leur nourriture & pour celle de leurs petites mouches. Cette ſubſtance ſucrine ou miellée ſe manifeſte aſſez au goût dans pluſieurs eſpeces de fleurs, comme dans celles du trefle des prez, dans celles des roſes, des œillets ; car ſi on les léche principalement vers la partie d'embas, qu'on appelle onglets, & qui eſt contenue dans le calice, on ſentira un goût doux & agreable. Cette ſubſtance reçoit dans l'Abeille & dans la ruche une élaboration qui la perfectionne & la réduit en miel.

Pluſieurs choſes contribuent à faire de bon miel, comme la chaleur & la pureté de l'air, la bonté des Abeilles, la nature des plantes qu'elles ont léchées, l'adreſſe des Ouvriers qui y travaillent.

On retire le miel des ruches en deux ſaiſons, au Printemps & en Automne. Il me paroît que la premiere eſt la plus convenable, parceque c'eſt le temps où les Abeilles ſont dans leur plus

*10. Juillet 1706.

plus grande vigueur ; qu'elles vont humer & ſuccer les roſées qui tombent abondamment aux mois d'Avril & de Mai, & que la ſubſtance des plantes eſt plus pure dans le renouvellement de la chaleur.

La meillleure maniere de ſeparer le miel, eſt de mettre les tablettes ou gateaux qu'on a retirez des ruches ſur des clayes ou nattes d'oſier. Il en coule un beau miel blanc excellent qui ſe congele : on l'appelle Miel vierge.

On tire encore du miel blanc des gateaux qui reſtent ſur les clayes d'oſier, en les mettant à la preſſe dans des ſacs de corde : mais il n'eſt pas ſi bon ni ſi blanc que le premier, tant à cauſe de la cire qui y donne une legere impreſſion des mouches vives ou mortes, & même des vers gros & blancs qui s'engendrent quelquefois dans les ruches, & qui y portent un grand préjudice ſi l'on n'y remedie ; car on obſerve que quand ces inſectes ſe ſont rencontrez dans le miel qu'on a exprimé, il ne ſe congele pas bien, à cauſe du vilain ſuc qui y eſt entré : le goût en eſt moins agreable, & il ſe garde difficilement ſans s'aigrir & ſe corrompre.

Le miel jaune eſt tiré de toutes ſortes de gateaux vieux & nouveaux qu'on a retirez des ruches : on les rompt, on les met dans des chaudieres, on y mêle un peu d'eau, & on les fait chauffer ; puis les aiant envelopez dans des ſacs de toile, on les met à la preſſe pour en faire ſortir le miel : la cire demeure dans les ſacs.

Pluſieurs Cantons du *Languedoc* & du *Dauphiné* fourniſſent le meilleur miel blanc que nous ayons en *France* : mais le plus eſtimé & le plus recherché de tous, eſt celui qu'on fait

en

en un petit Bourg nommé *la Corbiere*, ſitué à trois lieues de *Narbonne* : c'eſt celui que nous appellons miel de *Narbonne*. L'excellence de ce miel, à ce qu'on prétend, vient des Romarins qui ſont abondans & très-communs dans cette contrée, & dont les Abeilles ſuccent les fleurs ; neanmoins je remarquai en une année que je demeurai au *Languedoc*, qu'encore que la gelée qui y fut grande & extraordinaire l'hyver, eût fait perir preſque tous les Romarins, le miel qu'on recueillit au Printemps ſuivant ne ceda point en agrément ni en bonne qualité aux miels qui avoient été tirez les années précedentes.

Pour le miel jaune nous en voyons de pluſieurs ſortes qui different dans leur conſiſtance, dans leur couleur plus ou moins foncée, dans leur odeur & dans leur goût. Celui qui ſe tire de *Champagne* eſt le meilleur ; il doit être nouveau, de conſiſtance aſſez ferme, grenu, de couleur jaune dorée, d'un goût agreable. Les miels qui viennent de la *Touraine* & de *Picardie* ſont moins bons ; ils ſont écumeux, mal liez, & ſouvent d'une conſiſtance trop liquide, de couleur jaune aſſez foncée, ſentant un peu la cire, & d'un goût moins agreable que celui du miel de *Champagne*. Le miel qui ſe fait en *Normandie* eſt le moins bon de tous, & le plus mal préparé : ſa conſiſtance eſt quelquefois aſſez ſolide, & ſouvent trop liquide : ſa couleur eſt rougeâtre, ſon odeur eſt deſagreable, il a un goût de cire.

Ces differentes qualitez de miels ne viennent pas tant de la temperature du climat, que de la bonne ou mauvaiſe manœuvre des Ouvriers. Ceux de *Normandie* mettent trop d'eau dans leurs

leurs gâteaux, & ils ſont obligez enſuite d'en faire conſumer une partie ; c'eſt peut-être ce qui rend leur miel rougeâtre. Ils en ſeparent mal la cire par les preſſoirs, ce qui fait qu'il a un goût de cire : ce n'eſt pourtant pas leur profit, car la cire eſt bien plus chere que le miel.

Le miel eſt en uſage dans quelques alimens & dans les remedes ; mais il l'étoit beaucoup davantage avant qu'on eût trouvé l'invention du ſucre. Les Anciens en aſſaiſonnoient leurs ragouts, & ils l'emploioient pour leurs confitures, comme quand ils préparoient leur *Melimelum*, qui étoit du coing ou une autre pomme confite dans du miel. On en ſervoit ſur leurs tables. Ils s'en ſervoient pour leurs ſyrops & pour leurs autres compoſitions medecinales, comme nous nous ſervons du ſucre. Ils en compoſoient diverſes ſortes de boiſſons, comme de l'Hydromel qu'ils appelloient auſſi *Melicratum*, *Aqua mulſa*, *Apomeli*. Nous nous ſervons ſouvent pour la délicateſſe du goût à la place de cet Hydromel, de l'eau ſucrée.

Ils beuvoient du vin miellé qu'ils appelloient *Oenomeli*. Nous nous ſervons à ſa place du vin ſucré, de l'Hypocras.

Ils beuvoient auſſi de l'Oxymel : c'étoit un mêlange de miel & de vinaigre qu'ils temperoient avec beaucoup d'eau pour ſe rafraîchir. Nous nous ſervons à ſa place du ſyrop aceteux, du ſyrop de limons, ou des autres ſyrops aigres, & nous n'emploions plus guere ces liqueurs miellées que pour les remedes.

Au reſte le miel eſt ſouvent préferable au ſucre, quand on n'a point tout-à-fait égard à la délicateſſe du goût ; car outre que c'eſt un ramas

mas de la ſubſtance la plus pure & la plus éthérée d'une infinité de fleurs qui poſſedent de grandes vertus, il eſt plus balſamique, plus pectoral & plus anodin que le ſucre, qui n'eſt que le ſuc purifié & épaiſſi du ſeul roſeau.

Le miel devient amer par une trop forte coction, de même que les autres choſes douces: il s'enflamme au feu à peu près comme le ſucre.

Les Abeilles ſauvages font ſur les rochers de gros amas de miel qui ne ſervent ordinairement que pour la nourriture des mouches & des oiſeaux. Pluſieurs croient avec aſſez de vrai-ſemblance que l'Ambre gris en provient; mais ce n'eſt pas dont il s'agit preſentement.

Analyſe du Miel.

J'ai mis en diſtillation au bain Marie dans une grande cucurbite de grez trente-deux onces du plus excellent miel de *Narbonne* que j'aie pû trouver. J'en ai eu ſix onces d'une eau claire comme de l'eau commune. J'en aurois tiré davantage ſi j'avois continué la diſtillation; mais je ne voulois que la premiere eau qu'on appelle Roſée de miel. Elle a l'odeur du miel, elle eſt inſipide; cependant elle contient un acide, car elle a rougi le tourneſol. Elle n'a fait aucune ébulition avec l'huile de tartre, ni avec l'eſprit volatil de ſel armoniac. Cette roſée de miel eſt eſtimée propre pour faire perdre le lait aux Nourrices, pour exciter l'urine, pour aider à la reſpiration. On en prend trois ou quatre onces à la doſe, deux ou trois fois par jour.

J'ai retiré la cucurbite du bain Marie, & je l'ai placée au bain de ſable où j'ai continué la diſ-

diſtillation par un feu mediocre. Le miel s'eſt beaucoup gonflé, & il a rendu quatre onces d'une ſeconde eau claire, de couleur jaune, d'une odeur de miel aſſez agreable, d'un goût acide & acre, ſentant un peu le feu. Elle a donné au tourneſol une belle couleur rouge foncée.

J'ai pouſſé le feu un peu plus fort ſous le miel, il s'en eſt élevé beaucoup de fumées blanches qui ont rempli de nuages le chapiteau & le recipient, & elles ſe ſont réſoutes en une troiſiéme eau qu'on appelle Eſprit de miel, peſant trois onces, de couleur rouge, d'une odeur de brûlé, mais agreable, & d'un goût acide fort acre, pénétrant & brûlant un peu la bouche. Elle a bouillonné avec les alkali : elle a donné au tourneſol, comme la précedente, une belle couleur rouge foncée.

J'ai augmenté fortement le feu ſous la cucurbite, & je l'ai continué juſqu'à ce qu'il ne parût plus de nuages dans le chapiteau. Il a diſtillé une quatriéme eau peſant deux onces, aiant une odeur ſemblable à la précedente, de couleur orangée, d'un goût acide accompagné d'acreté, mais moindre qu'en la troiſiéme eau, ce qui m'a paru étonnant ; car ces liqueurs devroient être de plus en plus acres à meſure qu'elles approchent de la fin de la diſtillation : c'eſt apparemment que cette derniere eſt plus empreinte de parties huileuſes que l'autre, car l'huile adoucit & tempere l'acreté des ſels. Elle a bouillonné avec les liqueurs alkalines, & elle a rougi le tourneſol.

J'ai trouvé dans la cucurbite une maſſe très-rarefiée, legere, noire, peſant quinze onces & demie ; je l'ai remiſe en diſtillation dans une cor-

cornue, & j'en ai encore tiré par un grand feu ſept onces d'une liqueur rouge brune, teignant fortement les doigts en couleur orangée, d'une odeur forte de brûlé, mais qui n'eſt pas beaucoup deſagreable, d'un goût acide, acre & piquant, & deux dragmes d'huile épaiſſe & noire comme de la poix, d'un goût acre. Cette acreté procede d'une portion de ſel qui s'y eſt attachée. Le miel doit contenir beaucoup plus d'huile qu'il ne s'en eſt ſeparé par les diſtillations; mais il en demeure toûjours une bonne partie dans les dernieres liqueurs diſtillées: car ſi on les laiſſe repoſer quelques jours, il s'en précipite un peu au fond du vaiſſeau, & il s'en attache aux côtez. Elle eſt eſtimée bonne pour la carie des os.

J'ai rectifié la liqueur rouge-brune derniere diſtillée, elle eſt fort claire, mais ſa couleur tire un peu ſur le jaune: ſon odeur eſt deſagreable, & ſon goût a un peu diminué en acreté: C'eſt ce qu'on appelle Eſprit ou aigre de miel rectifié.

J'ai retiré de la cornue ſept onces & ſix dragmes d'une eſpece de charbon noir, rarefié, terreſtre, preſqu'inſipide, mais marquant pourtant au goût, quand on l'a mâché, quelque legere impreſſion de ſel. J'en parlerai encore dans la ſuite.

On voit par ces diſtillations que trente-deux onces de miel de *Narbonne* rendent vingt-quatre onces & deux dragmes de liqueur. Je n'en ai à la verité tiré que vingt-deux onces & ſix dragmes, mais le reſte s'eſt diſſipé par les jointures des vaiſſeaux; car quelque exactitude qu'on apporte dans ces operations, il s'en perd toûjours.

Je

Je ne me ſuis pas contenté d'avoir fait l'analyſe du miel blanc le plus pur tiré de la ruche ſans expreſſion, j'ai fait celle du ſecond miel tiré par une legere expreſſion. Il étoit de bonne conſiſtance, aſſez ferme, de couleur blanche tirant ſur le jaune, d'aſſez bonne odeur, d'un goût agreable; je l'ai fait diſtiller au même poids comme le précedent, j'en ai tiré les mêmes principes: mais les premieres eaux m'ont ſemblé moins odorantes que celles du miel de *Narbonne*, & il y en a eu ſur le total demie-once moins. Il m'eſt reſté dans la cornue huit onces & deux dragmes de charbon ſemblable au précedent, mais un peu plus noir. Cette derniere diſtillation fait voir que le miel pour peu qu'il ait été exprimé au ſortir de la ruche, contient plus de terre que celui qui a été fait ſans expreſſion.

J'ai fait encore l'analyſe du miel de *Champagne*; il étoit de bonne conſiſtance, de couleur jaune, d'une odeur fade, d'un goût moins agreable que celui des miels dont j'ai parlé. J'en ai mis trente-deux onces en diſtillation: les premieres eaux que j'en ai tiré ont une odeur miellée uu peu plus foible que celle des précedentes; mais les dernieres qu'on appelle Eſprit de miel, m'ont paru tant ſoit peu plus acres, & elles ont été moins abondantes, car je n'en ai tiré en tout que vingt-deux onces & demie. J'ai trouvé dans le chapiteau après la diſtillation, outre une petite quantité d'huile noire & épaiſſe, un morceau de cire jaune peſant deux dragmes, auſſi dure & auſſi parfaite qu'aucune autre. Cette cire avoit paſſé avec le miel quand on avoit preſſé les gateaux, & s'y étoit tenuë diſſoute, le feu l'a fait ſeparer & élever avec l'eſprit.

J'ai

J'ai trouvé dans la cornuë après la derniere diſtillation neuf ouces d'un charbon rarefié ſemblable aux précedens. Ce miel commun de *Champagne* a donc contenu plus de terre que le miel blanc ; ce qui vient de l'expreſſion plus forte qu'on en a faite au ſortir de la ruche.

J'ai fait encore l'analyſe du miel de *Normandie* ; il étoit de conſiſtance aſſez ferme, de couleur jaune rougeâtre, d'une odeur & d'un goût moins agréable que les autres. J'en ai donc mis en diſtillation trente-deux onces, il en eſt ſorti des liqueurs pareilles à celles que j'ai tirées du miel de *Champagne*, & j'ai trouvé au chapiteau un morceau de cire peſant trois dragmes: il m'eſt reſté dans la cornuë neuf onces de charbon rarefié comme aux diſtillations précedentes.

J'ai ramaſſé tous les charbons de miel qui ſont ſortis des cornuës après les diſtillations dont j'ai parlé, j'en ai mêlé avec des acides les plus forts, ils n'ont point fermenté.

J'ai mis calciner à grand feu trois livres & demie ou cinquante-ſix onces de ces charbons de miel dans un pot de terre ſimple ſans verniſſure pendant dix heures : cette matiere s'eſt allumée comme le charbon ordinaire, mais elle ne s'eſt point reduite en cendres; elle n'a diminué que de dix onces, & elle eſt reſtée noire & en charbon: elle a pris un goût un peu ſalé. J'ai verſé ſur une proportion de cette matiere une liqueur acide, il s'y eſt fait effervescence. J'ai mis le reſte tremper dans de l'eau pour en faire une leſſive, le mêlange a bouillonné comme quand on éteint de la chaux. J'ai filtré la liqueur, & je l'ai miſe évaporer, il ne m'eſt

m'eſt reſté qu'une dragme & demie d'un ſel alkali acre & piquant au goût. Il a fermenté avec les acides, & il a troublé la diſſolution du ſublimé. Il eſt aperitif, fondant & réſolutif comme les autres ſels alkali fixes, lexiviels. On en peut donner juſqu'à deux ſcrupules à la doſe.

J'ai fait ſecher dans une terrine qui n'étoit point verniſſée la cendre ou plûtot le charbon de miel reſté après la leſſive, il eſt demeuré inſipide, & il n'a plus été alkali. Je l'ai remis calciner, il a pris feu & il a rougi, mais il ne s'eſt point réduit en cendres, quoique le feu que j'y ai emploié ait été fort grand. Il n'eſt point non plus revenu alkali, & je n'en ai pû tirer de ſel par une nouvelle leſſive que j'en ai faite. Je l'ai mis ſecher exactement comme devant, & j'ai fait ſur cette matiere une experience qui m'a paru ſurprenante, & qui merite d'être rapportée ici.

J'ai mis ſur un papier une portion de ce charbon de miel écraſé en poudre groſſiere, j'en ai approché un couteau aimanté, j'ai apperçû que beaucoup de particules du charbon ſe ſont auſſi-tôt hériſſées, ont été attirées par le couteau, & s'y ſont attachées tout de même que la limaille de fer eſt attirée par l'aimant & s'y attache.

Cette experience montre que le charbon de miel contient du fer; car juſqu'à preſent il ne nous a point paru de matiere autre que le fer qui fût attirée par l'aimant. Au reſte je puis aſſurer que toutes mes operations ſur les miels ont été faites dans des vaiſſeaux de terre ou de verre, ſans qu'il y ait eu communication du fer, ni même d'aucun autre metal. Le charbon de

miel avant qu'il eût été calciné & dépouillé de ſon ſel, étoit auſſi attiré par l'aimant, mais moins bien ou en plus petite quantité.

Cette experience confirme celles que M. *Geoffroy* a rapportées à la Compagnie touchant le fer qu'il aſſure avoir trouvé dans les cendres de differens vegetaux. Mais quoique le miel ſoit tiré des plantes, il a reçû tant d'élaborations differentes qu'il ne laiſſoit gueres lieu de ſoupçonner avant cette experience qu'on en pût tirer du fer.

On explique ce phenomene en deux manieres differentes. La premiere eſt que les racines des plantes ſuccent un ſuc vitriolique ou ferrugineux dont on croit que toutes les terres ſont empreintes, & que ce ſuc monte & ſe diſtribuë par toute la plante pour ſa nourriture ; d'où vient, dit-on, qu'après avoir brûlé la plante, on trouve dans ſes cendres le fer dont le feu a fait raſſembler & rejoindre les particules.

La ſeconde explication ne reconnoît point de fer dans les plantes en leur état naturel ; mais elle prétend que le feu par la force de ſon action brûlant ou calcinant les plantes, convertit une partie de leurs cendres en fer.

L'une & l'autre explication me paroît bien difficile à comprendre ; car pour la premiere il faut non-ſeulement admettre que toutes les terres où croiſſent les plantes ſoient ferrugineuſes : il faut concevoir que la ſubſtance peſante du fer ait été portée & élevée juſqu'au ſommet de la plante, qu'elle ait ſervi à compoſer le ſuc le plus volatil & le plus pur des fleurs, reſſemblant à une roſée que les abeilles lechent & recueillent : que cette ſubſtance ait ſouffert toutes les élaborations dans les mouches & dans les ru-

ruches, ſans que la partie ferrugineuſe s'en ſoit ſeparée: & qu'enfin cette partie ferrugineuſe ait été à l'abri de toutes les tortures qu'on a données au miel dans l'analyſe qu'on en a faite.

La ſeconde explication n'eſt pas moins obſcure que la premiere ; car on ne ſe perſuadera pas aiſément que la ſeule action du feu puiſſe convertir le charbon de miel en fer.

Je ne ſai ſi au milieu de ces deux explications, il n'y auroit point lieu de ſoupçonner qu'il ſe puiſſe rencontrer dans la nature pluſieurs matieres autres que le fer capables d'être attirées par l'aimant. C'eſt peut-être ce qu'un grand nombre d'experiences nous découvrira avec le temps.

Il y a deux petites réflexions à faire ſur l'analyſe du miel. La premiere eſt, que quoique le miel en ſon état naturel ait une ſaveur très-douce, il n'y a pas un de ſes principes qui étant ſeparé ait retenu ce goût. On en tire par la diſtillation une eau preſque inſipide, beaucoup de liqueur acide qu'on appelle eſprit, de l'huile, un peu de ſel fixe; mais en toutes ces ſubſtances ſon goût naturel ne ſe rencontre point, & même on a beau remêler ces principes enſemble, on n'y remettra point la douceur. Mon ſentiment ſur ce fait eſt que pour faire la douceur il faut un mêlange exact d'acide & d'huile: l'huile ſeule eſt fade & paſſe ſur la langue ſans y faire d'impreſſion, l'acide au contraire picotte la langue ; mais quand ces deux principes ſont mêlez enſemble, les pointes de l'acide ſont liées par les parties rameuſes de l'huile, enſorte qu'elles n'ont plus la force de faire de l'irritation ſur la langue, mais elles en ont aſſez pour faire pénétrer doucement l'huile en lui

ſervant de vehicule, & exciter ſur les nerfs du goût une agréable impreſſion ou chatouillement que nous appellons douceur. Ce raiſonnement eſt confirmé par une infinité d'experiences, car de toutes les choſes douces on retire de l'acide & de l'huile, & alors il n'y a plus de douceur. On fait auſſi du doux en mêlant exactement un acide avec une matiere ſulfureuſe; car ſi l'on fait diſſoudre le plomb qui eſt inſipide mais ſulfureux, avec un menſtruë acide, la diſſolution ſera douce, & l'on en fera par évaporation un ſel qu'on appelle ſucre de Saturne, à cauſe de ſa grande douceur. Si enſuite l'on fait diſtiller ce ſel de Saturne, on en retirera une liqueur acide, & il n'y aura plus de ſaveur ſucrée. Il ne ſuit pourtant pas de ce raiſonnement que toutes les fois qu'on mêlera groſſierement une liqueur acide avec de l'huile ou avec une matiere ſulfureuſe, le mêlange en ſera doux: il faut pour faire la douceur que l'acide ſoit intimement & parfaitement incorporé & mêlé avec l'huile, ce qui eſt fait très-ſouvent par la nature, & quelquefois par l'art.

La ſeconde reflexion eſt que ſuivant toutes les apparences le miel en ſon état naturel ne contient aucun alkali: tout ce qui en provient par la diſtillation eſt acide. Le charbon même qu'on en retire au ſortir de la cornuë ne donne point de marque d'alkali, puiſqu'il ne fermente point avec les acides. Et ſi le peu de ſel fixe qu'on tire de ce charbon eſt alkali, ce n'eſt qu'après une grande & longue calcination, qui rendant la plûpart des ſels poreux & en chaux, les fait devenir alkali d'aci-

d'acides qu'ils étoient. L'eſprit de miel rectifié eſt aperitif; on en peut donner juſqu'à deux ſcrupules à la doſe. On s'en ſert auſſi exterieurement pour faire croître les cheveux. Celui qui reſte au fond de la cucurbite après la rectification, eſt bon pour déterger les vieux ulceres : il contient la partie la plus acre de la liqueur. Pluſieurs Chimiſtes ont dit dans leurs Ecrits que l'eſprit de miel rectifié diſſolvoit l'or & pluſieurs autres metaux : mais comme tout ce qui eſt écrit n'eſt pas toûjours veritable, j'en ai voulu faire l'experience. J'ai trouvé qu'effectivement ce menſtruë avoit diſſout quelque legere portion de l'or, mais ſans qu'on y eût apperçû aucune fermentation.

L'argent ni l'étain n'ont point été pénétrez pas cet eſprit: le fer en a été bien pénétré, & il s'eſt fait une teinture noire & vitriolique.

Le plomb en a été auſſi pénétré, & le diſſolvant a pris un goût doux & ſucrin, ce qui marque une diſſolution.

Le cuivre a donné au menſtruë une impreſſion & une odeur de Venus, mais il ne lui a point fait changer de couleur.

Le mercure en a été pénétré, & il s'en eſt diſſout une petite portion.

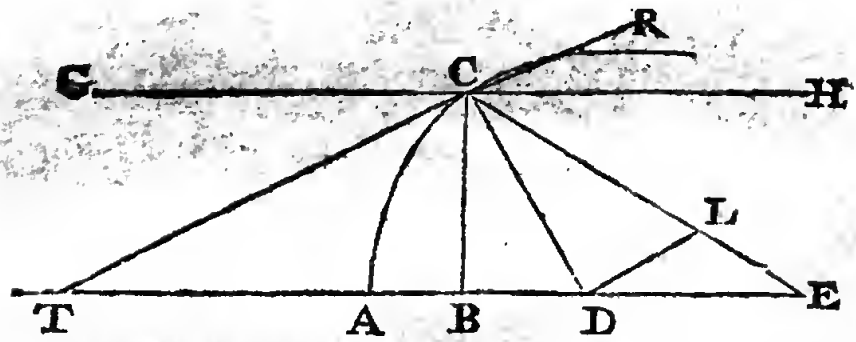
METHODE

Pour trouver les foyers des Lignes Geometriques de tous les genres.

PAR M. ROLLE.

ARTICLE PREMIER.

* SOIT *AC* une Courbe telle qu'on voudra, & que l'on veuille trouver tous les foyers qui ſe forment dans ſon axe générateur *AE*.



On obſervera en premier lieu les lignes qui doivent ſervir au calcul. Enſuite l'on exprimera chacune de ces lignes par des lettres : ce qui ſe peut faire en cette maniere.

AB abſciſſe quelconque dont l'appliquée *BC* fait un angle droit *CBD* avec l'axe *AE*, & le point *C* eſt un point pris à volonté ſur la Courbe.

CD eſt une droite perpendiculaire à la Courbe propoſée, ou le rayon de la tangente au point *C*.

T

* 21. Juillet 1706.

T eſt un point donné ſur l'axe AB.

TCR eſt un rayon de lumiere, ou le rayon incident, ou le rayon direct.

CE eſt le rayon lumineux rompu en C, qui rencontre l'axe en un point E.

DL parallele au rayon incident TC.

DCR ou TCD eſt l'angle d'incidence.

DCE eſt l'angle rompu, ou l'angle de refraction. Ainſi l'angle rompu DCE, & l'angle d'incidence TCD ou ſon égal CDL, ſont deux angles du triangle CLD; & delà il eſt aiſé de voir que le côté CL eſt au côté LD, comme le ſinus de l'angle d'incidence eſt au ſinus de l'angle rompu.

On prendra m & n pour exprimer les rapports du ſinus de l'angle d'incidence au ſinus de l'angle rompu.

y pour l'expreſſion des abſciſſes AB.

x pour les appliquées BC.

z pour la ſous-perpendiculaire BD.

t pour TA. l pour TC.

v pour AE. d pour DE.

b pour DL, & par conſéquent $\frac{mb}{n}$ pour CL.

r pour CE. Ainſi l'on aura $r - \frac{mb}{n}$ pour LE.

s pour la ſoûtangente des y.

Cela poſé, on formera toutes les égalitez que fournit la figure rectiligne. Ce qui ſe peut faire comme on le voit ici.

$y + z + d = v$. pour les parties de l'axe.

$s : x :: x : z$. Donc $sz = xx$. Parceque l'appliquée eſt moienne proportionnelle entre la ſoûtangente & la ſoûſperpendiculaire.

$ll = xx + yy + 2yt + tt$. à cauſe de l'angle droit CBT.

$rr = xx + zz + 2dz + dd$. à cauſe de l'angle droit CBE.

$d : h :: v + t : l$. Donc $ld = lr + ht$.

$h : r - \frac{mh}{n} :: l : r$. Donc $rh = lr - \frac{mhl}{n}$.

Ces deux dernieres égalitez ſe tirent des triangles ſemblables EDL, ETC: Et ces deux triangles ſont ſemblables à cauſe que DL eſt parallele à TC.

Faiſant évanouïr toutes les inconnues hors l, r, t, v, on trouvera cette égalité:

$mvsl - mxxl - mysl = ntsr + nxxr + ntsr$.

Où l'on voit que l & r ſont en ſituation réciproque, auſſi-bien que v & t. Ce qui ſervira dans la ſuite à faire voir que le point E ſe peut conſiderer comme un point donné, & le point T comme celui que l'on cherche.

Et ſi l'on fait encore évanouïr l & r, on aura l'égalité ou la formule que l'on voit ici en M.

$$M.\ \overline{mvs - mxx - mys}^{2} \times \overline{tt + 2ty + yy + xx} = \overline{nts + nxx + nys}^{2} \times \overline{vv - 2vy + yy + xx}.$$

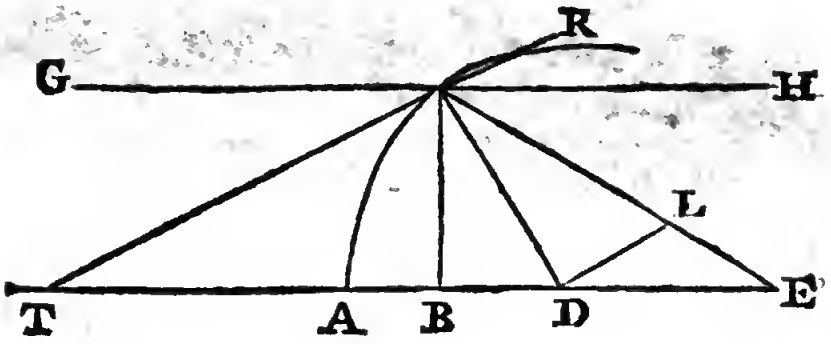
Dans cette formule M la lettre t exprime une ligne donnée ou indéterminée, & tandis que cette ligne ſera finie les rayons TC feront toûjours un angle oblique avec l'appliquée CB. Mais ſi l'on veut que cet angle ſoit droit, & que par conſequent les rayons incidens ſoient paralleles à l'axe; alors l'inconnue t deviendra infinie, & dans ce cas ſon premier coefficient ſera détruit dans la formule M, ſelon ce qui a été dit des premiers coefficiens dans la methode

des

des Queſtions indéterminées que je donnai au public en l'année 1699. Enſorte que la formule *M* ſe réduira à celle que l'on voit ici en *N*.

$$N.\ mvs - mmx - mys^{2} = nnss \times vv - 2vy + yy + xx.$$

Ainſi l'égalité *N* eſt une formule pour le cas où les rayons ſont paralleles à l'axe, comme l'égalité *M* eſt une formule pour les rayons qui ſont obliques à l'axe, & qui partent d'un point fixe *T*.



On trouveroit encore cette formule *N* par la comparaiſon des lignes ou des angles, en ſuppoſant que le rayon *GC* ſoit parallele à l'axe *AB*. Alors l'angle d'incidence *GCD* ſeroit égal à l'angle *CDE* du triangle *CDE*; & l'on a dans le même triangle l'angle rompu *DCE*: de maniere que le côté *CE* ſeroit au côté *ED*, comme le ſinus de l'incidence au ſinus de la refraction, ou comme *m* eſt à *n*. Et prenant les autres égalitez qui ſe preſentent, on en tireroit d'abord la formule *N*.

Comme les foyers qui ſe forment des rayons paralleles ſont les premiers dont on fait quelque uſage, & que la formule en eſt ſimple, je la prendrai pour exemple dans la ſuite de ce premier Memoire.

ART. II. Si l'on a l'égalité génératrice d'une Courbe, & que l'on veuille trouver les foyers de cette Courbe avec les conditions que l'on a marquées dans l'Article précedent, on prendra l'égalité de la ſoûtangente qui appartient à l'axe ſur lequel ſont les foyers; & comparant ces deux égalitez à celles du premier Article, ou ſeulement à la formule qui en réſulte, on en fera évanouïr toutes les inconnues hors x & v. En quoi il faut obſerver de mettre au lieu de m & de n les nombres qui leur ſont égaux, & il arrivera que les deux inconnues x & v ſe trouveront dans la réduite, ou bien que cette réduite n'aura que la ſeule inconnue v. Ce qui marque deux cas dans la Regle.

Si l'on prend pour exemple l'égalité génératrice marquée P, on aura pour la ſoûtangente des y, celle que l'on voit en R.

$$P.\ 9xx = 18ay - 5yy. \qquad R.\ s = \frac{9xx}{9a - 5y}.$$

Et voulant trouver les foyers des rayons qui ſont paralleles à l'axe des y, on prendra ces deux égalitez avec la formule N de l'Article précedent pour en faire évanouïr les inconnues x & y. En quoi il faut ſe ſouvenir de ſubſtituer les nombres qui ſont égaux à m & à n, ou qui en marquent le rapport; & ſi l'on a $m = 3$ avec $n = 2$, comme on le fait ordinairement lorſque les rayons paſſent de l'air dans le verre, la réduite ſera telle qu'on la voit ici en D.

$$D \ldots 5vv - 18av + 9aa = 0.$$

ART. III. Lorſque l'inconnue v eſt la ſeule inconnue de la réduite, comme dans l'exemple du précedent Article, on a autant de foyers ſur l'axe propoſé, qu'il ſe trouve de racines réelles dans

dans cette réduite, & chacun de ces foyers eſt un point geometrique.

Pour trouver ces foyers il n'y a qu'à prendre ſur cet axe des parties comme AE qui ſoient égales à ces racines.

Dans l'exemple propoſé les racines de la réduite ſont $3a$ & $\frac{1}{3}a$. Ainſi du point A comme centre & des intervales $3a$ & $\frac{1}{3}a$, aiant décrit deux cercles, les deux points où ils coupent l'axe du côté de E, ſont deux foyers de la Courbe propoſée qui ont les conditions requiſes.

ART. IV. Si les deux inconnues x & v ſe trouvent dans la réduite, on ſuppoſera que le dernier terme des x eſt égal à 0. Ce qui donnera une égalité dans laquelle il n'y aura que la ſeule inconnue v : Et cette égalité étant réſolue, ſes racines ſerviront à trouver les foyers qu'on demande, comme on le va dire ici.

Soit pour exemple l'égalité génératrice marquée ici en E.

$$E \ldots xx = 2ay - yy.$$

On aura pour l'égalité des ſoûtangentes celle que l'on voit ici en F.

$$F \ldots s = \frac{xx}{a - y}.$$

Comparant ces deux égalitez avec la formule N pour avoir les foyers des rayons qui ſont paralleles à l'axe, comme on l'a dit aux Articles qui précedent, & prenant $2m = 3n$ pour le rapport des ſinus, on trouvera la réduite H.

$$H. \quad \begin{array}{l} +\ 64vvxx + 25v^4 = 0. \\ -\ 128avxx - 100av^3 \\ +\ 64aaxx + 46aavv \\ \qquad\quad + 108a^3v \\ \qquad\quad - 63a^4 \end{array}$$

Et ſuppoſant que le dernier terme des x ſoit égal à θ, on aura l'égalité G.

$G.\ 25v^4 - 100av^3 + 46aavv + 108a^3v - 63a^4 = \theta$, dont les racines ſont $-a.\ \frac{3}{5}a\ \ \frac{7}{5}a.\ 3a.$

Les racines d'une égalité ainſi trouvée, ſont les limites des foyers que l'on demande ſur l'axe propoſé AB, pour tous les rameaux de la Courbe propoſée : Et comme on ne demande pas ordinairement tous ces foyers, ni même l'étendue entiere d'un ſeul, on peut en rabatre tout ce qui ne ſert point aux deſſeins particuliers que l'on peut avoir ſur ce ſujet, comme on le va dire ici.

Parmi tous ces foyers il s'en trouve d'imaginaires qui doivent être exclus, & ſouvent auſſi il s'en trouve de negatifs qui ne répondent pas à l'intention que l'on a. Mais la methode les diſtingue, & cela ſe peut faire en cette maniere.

On diſpoſera les racines de l'égalité G ſelon l'ordre de leur grandeur, comme on le voit en K.

$K\ \ldots\ -a.\ \frac{3}{5}a.\ \frac{7}{5}a.\ 3a.$

Et l'on prendra d'autres grandeurs dans leurs intervales une dans chacun, comme je l'ai dit dans la Methode des indéterminées, & comme on le voit ici en L.

$L\ \ldots\ 2a\ \ \theta.\ \ \frac{2}{5}a.\ \ 4a.$

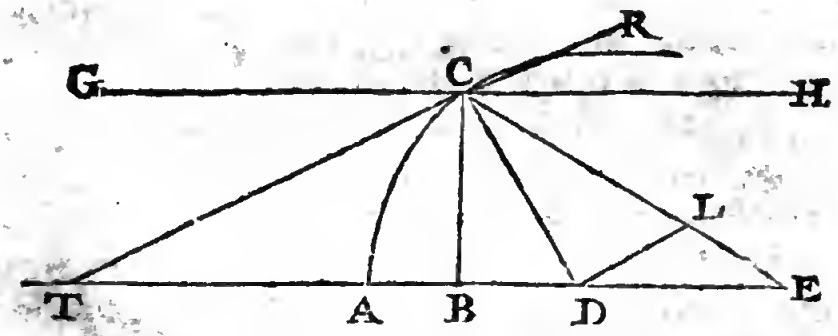
Enſuite on ſubſtituera chacune de ces quantitez au lieu de v dans la réduite H, pour ſavoir ſi elle donne des valeurs réelles ou des imaginaires pour x dans l'égalité qui réſulte de la ſubſtitution.

Si la réſultante renferme des valeurs réelles de x, alors l'intervale dans lequel aura été priſe la valeur ſubſtituée ſera un foyer lineaire où

ſe

ſe vont rendre tous les rayons rompus. Ainſi l'on trouvera que l'intervale de $-a$ à $\frac{1}{5}a$ eſt un foyer, & que l'intervale de $\frac{7}{5}a$ à $3a$ eſt encore un foyer de la Courbe propoſée ſur l'axe propoſé : parceque la ſubſtitution de θ & celle de $2a$ qui ont été priſes dans ces intervales donnent des valeurs réelles pour l'inconnue x.

Mais il peut arriver que parmi ces foyers il y en ait quelques-uns qui n'ont pas toutes les conditions que l'on y a deſirées ; auquel cas on peut toûjours s'en aſſurer par le calcul. Car toutes ces conditions doivent être exprimées par des égalitez dans le Problême rectiligne, comme on l'a fait ici art. 1. & 2. De maniere que ce Problême étant pleinement réſolu, il ſera facile de voir ſi tous les ſegmens de la Figure ſont tels qu'on les a ſuppoſez ou qu'on les deſire. Quelquefois une partie de ces conditions ſuffiroit pour exclure les foyers qui ne conviennent pas, ou bien pour s'aſſurer de ceux qui conviennent. Par exemple, dans l'hypotheſe que l'action de la lumiere ſe fait de G en C, il faut que les foyers ſoient dans l'axe poſitif AB, & delà on voit que le foyer qui a pour limites $-a$ & $\frac{1}{5}a$ ne peut pas ſatisfaire à cette condition.



Mais delà on peut voir auſſi que le foyer ren-

fermé entre $\frac{7}{3}a$ & $3a$ eſt un foyer lineaire qui a toutes les conditions que l'on y a demandées.

Cette methode eſt générale pour les lignes geometriques de tous les genres; mais elle ſuppoſe d'autres methodes que j'ai données au public, comme on le verra dans les Remarques ſuivantes.

REMARQUES.

Premiere. Souvent il arrive que l'égalité propoſée fournit differentes Courbes, ou une Courbe compoſée de differens rameaux, & il eſt certain que tous ces rameaux ne peuvent pas également convenir aux differens deſſeins que l'on peut avoir ſur la fabrique & ſur l'uſage des verres. Ainſi il eſt comme neceſſaire pour cette raiſon & pour d'autres raiſons encore, de connoître les contours de tous ces rameaux & leur differente ſituation à l'égard de l'axe générateur, & de l'origine qui leur eſt commune. Ce qui ſe peut faire par le moien de la methode que je donnai au public en l'année 1699 pour la réſolution des Queſtions indéterminées, ſelon ce qui en a été dit dans les Memoires de l'Academie de l'année 1702 pag. 231, & de l'année 1703 pag. 162.

Seconde. Dans l'hypotheſe que les foyers doivent être placez ſur l'axe, il eſt évident qu'en pluſieurs occaſions il faudroit le transferer, & par conſéquent transformer l'égalité génératrice. Cela ſe peut faire en général par le moien des formules que j'ai données pour ces tranſpoſitions d'axes dans le *Journal* du 13 Avril 1702 pag. 388, de l'Ed. d'*Amſterdam*, ou bien par des voies particulieres qui ſont ordinaires, & qui peuvent quelquefois ſuffire dans cette occaſion.

On

On peut chercher les foyers dans le plan de la Courbe ſans faire cette tranſpoſition d'axes, ni par conſéquent transformer l'égalité propoſée; & même on le peut faire lorſque les rayons viennent d'un point donné hors de l'axe dans le même plan. Alors il faudroit faire des additions & d'autres changemens dans le Problême rectiligne: ce qui augmenteroit le calcul, mais il n'y auroit d'ailleurs aucune difficulté conſiderable.

Troiſiéme. Les réduites telles que *H* du ſecond exemple produiſent des Courbes dont les axes ſont les foyers des Courbes propoſées; enſorte que ces axes ſont Cauſtiques, & même leurs Courbes le ſont auſſi. Ainſi la réduite *H* fournit deux feuilles égales & ſemblables, dont les axes limitez ſont deux foyers lineaires de la propoſée *E*, & l'on peut dire que ces feuilles ſont plus ou moins ardentes, ſelon que leurs parties ſont plus ou moins proches de l'axe, & ſelon que les parties de cet axe ſont plus ou moins embraſées.

Quatriéme. Les *maxima* & les *minima* de la réduite ſervent à diſtinguer dans chacun des foyers que fournit la methode, toutes les parties qui conviennent aux differens rameaux de la Courbe propoſée. Ainſi dans le dernier exemple les *maxima* de *x* pris dans la réduite diviſent chaque foyer en deux parties, dont l'une appartient au demi-cercle qui preſente ſa convexité aux rayons lumineux, l'autre partie de ce foyer appartient au demi-cercle qui reçoit ces rayons dans ſa concavité. Mais dans cette ſeconde partie il faut ſuppoſer qne la refraction ſe change en une eſpece de reflexion, de maniere que l'incidence ſoit à cette reflexion comme

me m à n, ou bien que la refraction dans ce demi-cercle ne dirige point les rayons lumineux du côté de l'axe, & que par conſéquent il faut retrancher du foyer tout ce ſuperflu pour ſatisfaire au deſſein que l'on s'eſt propoſé. Ainſi aiant trouvé que le foyer poſitif eſt l'intervale de $\frac{7}{5}a$ à $3a$ pour le cercle entier, on trouvera $2a - \frac{2a}{\sqrt{5}}$ pour ce qui appartient au premier demi-cercle dans lequel les refractions ont les conditions requiſes, & le reſte $\frac{2a}{\sqrt{5}} - \frac{2}{5}a$ qui appartiendroit au ſecond demi-cercle pourra être rejetté.

Cinquiéme. Par le moien d'une réduite telle que H, on peut trouver les parties de la Courbe propoſée qui conviennent à un foyer dont la longueur eſt donnée, & par conſéquent trouver le diametre du verre qui convient à ce foyer donné. On peut encore par la même réduite trouver la longueur du foyer qui convient à une portion donnée de cette Courbe, & par conſéquent à un verre dont le diametre eſt donné dans tous les cas poſſibles. Ce qui eſt évident, puiſque des deux inconnues de cette réduite, l'une exprime la longueur du foyer, & l'autre la hauteur du verre.

On n'a enviſagé dans la methode & dans ces remarques que la ſuperficie du verre, ne voiant pas qu'il y ait de la difficulté quand il faut avoir égard à ſon épaiſſeur, ni quand il faut ſe ſervir de pluſieurs verres, lorſque l'on a une methode pour la ſurface d'un verre quelconque.

Sixiéme. J'ai dit dans le ſecond article de la methode de ſubſtituer les valeurs de m & de n, &

& il étoit bon de le dire pour mieux faire voir comment le troiſiéme article eſt diſtingué du quatriéme article. Mais il y a des égalitez, quoiques conçûes en termes généraux, où il ne ſeroit pas neceſſaire de faire cette ſubſtitution en y appliquant le troiſiéme article, & on le verroit ſi l'on prenoit pour éxemple l'égalité marquée ici en *T*.

T . . . $mmxx = 2amny + nnyy - mmyy$.

On s'appercevroit d'abord, en y appliquant les trois premiers articles, que l'inconnue x s'évanouït par elle-même, ſans qu'il ſoit neceſſaire de déterminer m ni n. On verroit auſſi qu'il ne demeure dans la réduite que la ſeule inconnue v: que par conſéquent tous les foyers ſont des points geometriques, & que l'on a toûjours $v = \frac{am}{m \pm n}$ pour les trouver, lorſque les rayons ſont paralleles à l'axe.

Septiéme. La methode que je viens de propoſer étant bien conçûe, il ſera facile de l'appliquer aux égalitez dont les coefficiens ſont indéterminez, & de former ſon inverſe par le moien de la methode des indéterminées dont j'ai parlé dans la premiere remarque. Il y a des exemples neanmoins où cette methode ne ſeroit pas neceſſaire, comme on le va voir ici.

Soit pour exemple l'égalité marquée *V*.

V . . . $bxx = 2aby + cyy$.

Et qu'on veuille y appliquer la Regle que j'ai donnée ici pour trouver ſur l'axe des y les foyers de toutes les Courbes que fournit cette égalité, on aura d'abord $s = \frac{bxx}{ab + cy}$ pour les ſoûtangentes.

Ces

Ces deux égalitez étant comparées à la formule *N* du premier article pour faire évanouïr les inconnues, on trouvera, après que *s* & le quarré *yy* auront disparu, la résultante que l'on voit ici en *S*.

$$S \ldots \begin{array}{l} +cnnbxx - 2nnbcvy + nnbcvv = 0. \\ +nnbbx + 2mmbcvy - mmbcvv \\ -mmbbxx + 2mmccvy + 2mmabcv \\ -2bcmmxx - 2nnabby - mmaabc \\ -mmccxx + 2mmabby \\ \qquad + 2mmabcy \end{array}$$

Où l'inconnue *y* se trouve encore. Ainsi il faudroit poursuivre son évanouïssement pour avoir une réduite dans laquelle il n'y eût que *x* & *v* comme au quatriéme article. Mais si l'on ne veut que le cas du troisiéme article, il n'y a qu'à distribuer tous les monomes de cette égalité hors ceux dont *v* est la seule inconnue, & ceux aussi qui ne renferment aucune des inconnues, pour en former un problême auxiliaire comme on l'a fait dans l'inverse générale des tangentes, & comme on le voit ici en *C*.

$$C. \begin{cases} +nncb + nnbb - mmbb - 2mmbc - mmcc = 0. \\ \quad \text{pour les } xx. \\ -2nnbc + 2mmbc + 2mmcc = 0 \text{ pour les } vy. \\ -2nnabb + 2mmabb + 2mmabc = 0 \text{ pour les } y. \end{cases}$$

Prenant *a*, *b*, *c*, pour les inconnues du problême auxiliaire qu'expriment ces trois égalitez, on trouvera d'abord $c = \frac{nnb - mmb}{mm}$ qui résout entierement ce problême; & substituant cette valeur de *c* dans *S*, cette égalité *S* aura la forme que l'on voit ici en *A*.

A

$A... nnbcvv - mmbcvv + 2ammbcv - mmbcaa = \theta.$

Dans laquelle on trouve $v = \frac{am}{m \pm n}$ qui donne ſur l'axe des y tous les foyers des Courbes propoſées qui ſont des points geometriques. Et ſubſtituant auſſi la valeur de c dans la propoſée V, on aura la reſultante qui eſt marquée T dans la ſixiéme Remarque. Enſorte que cette égalité T renferme toutes les Courbes du premier genre dont les foyers ſont des points geometriques ſur l'axe des y ; & delà auſſi on voit que les valeurs de v priſes dans D donnent tous ces foyers.

Mais pour l'univerſalité de la methode il faut pourſuivre l'évanouïſſement de y juſqu'à ce qu'il ait entierement diſparu, & ſuppoſer que le dernier terme des x eſt égal à θ, comme on l'a dit au quatriéme article de la Methode ; de maniere que l'égalité ainſi formée n'aura que la ſeule inconnuë v.

Comme cette égalité ſe réſout entierement par la diviſion, il n'eſt pas neceſſaire d'y appliquer la methode des indeterminées pour tirer avantage de l'indétermination, & même l'on trouvera que les racines ne ſont pas fort compoſées. Car ces racines ſont comme on les voit ici en E.

$$E. \begin{cases} v = \frac{am}{m+n}. & v = \frac{acm + 2abm + 2abn}{-cm-cn}. \\ v = \frac{am}{m-n}. & v = \frac{acm + 2abm - 2abn}{cn-cm}. \end{cases}$$

Enſorte que ces quatre valeurs de v donnent tous les foyers de toutes les Courbes du premier genre ſur l'axe propoſé, ſoit que ces foyers ſoient

ſoient des points geometriques, ou qu'ils ſoient lineaires.

Si l'on veut les foyers du cercle, il eſt évident que dans ce cas l'égalité propoſée en *V* devient $xx = 2ay - yy$, & que par conſéquent il faut faire $b = -c$ pour ſubſtituer cette valeur de b dans les formules. Ce qui donne $v = \frac{am}{m \pm n}$, & $v = \frac{am - 2an}{m - n}$ pour les foyers du cercle.

Pour la Parabole on aura, $c = 0$, & par conſéquent $v = \frac{am}{m \pm n}$, & $v = \infty$ pour ſes foyers.

On aura les foyers de l'hyperbole en prenant un nombre poſitif pour $\frac{c}{b}$, & l'on trouvera ceux de l'Ellipſe ſi l'on prend pour $\frac{c}{b}$ un nombre negatif plus grand on plus petit que l'unité; enſorte que la ſubſtitution de ces valeurs *E* donnera les foyers ſur l'axe propoſé, & que la ſubſtitution de ces valeurs dans l'égalité *V* déterminera l'eſpece des hyperboles & des Ellipſes auſquelles ces foyers conviennent.

Juſques-ici j'ai pris le mot de foyer ſelon l'idée la plus ordinaire des Geometres, & ſelon cette idée l'on peut voir que toutes les Courbes ont des foyers finis ou infinis.

PRIN-

PRINCIPES GENERAUX
POUR LA RESOLUTION
DES EQUATIONS NUMERIQUES.

PAR M. DE LAGNY.

*SECONDE PARTIE.

†RESOUDRE une équation numerique, c'eſt trouver la valeur ou les valeurs de l'inconnue en nombres entiers lorſque cette valeur ou ces valeurs ſont rationelles, & les trouver à moins d'une unité près, lorſqu'elles ſont irrationelles.

Je ſuppoſe ces équations ſans incommenſurables & ſans fractions, parcequ'il eſt toûjours aiſé de leur donner cette forme par les regles ordinaires.

Réſolution reguliere eſt celle qui ſe fait par une methode reglée univerſelle & infaillible. Cette methode eſt d'autant plus parfaite qu'elle eſt plus courte & plus ſimple. C'eſt pourquoi, ſi par une certaine methode je trouve le nombre cherché deux ou trois fois plûtôt que par une autre, la premiere methode eſt deux ou trois fois plus parfaite ou meilleure que la ſeconde.

De quelque methode qu'on ſe ſerve, on ne peut trouver que par parties & l'une après l'autre le nombre cherché, lorſqu'il eſt grand. J'ap-

* *La premiere Partie eſt dans les Memoires de l'Academie de l'Année* 1705. *pag.* 367.

† 21 Juillet 1706.

J'appelle ces parties, le premier, le ſecond, le troiſiéme, &c. membre de la racine. Ainſi dans l'extraction des racines quarrées, cubiques, &c. ſuivant l'expreſſion ordinaire des chifres fondée ſur la progreſſion décuple, ſi la racine cherchée eſt par exemple 8673, on trouve d'abord le premier chifre, 8, c'eſt à dire le premier membre, 8000; & par le moien de celui-ci on trouve le ſecond, 6 ou 600; & par la ſomme de ces deux premiers membres 86 ou 8600 conſiderez comme un ſeul membre, on trouvera le troiſiéme, 7 ou 70; enfin par la ſomme des trois premiers membres trouvez, 867 ou 8670 conſiderez comme un ſeul membre, on trouve le quatriéme & dernier membre 3, ce qui donne la racine entiere cherchée, 8673.

Comme ces regles ſont fondées ſur le choix arbitraire, ou plûtôt capricieux, de la progreſſion décuple, elles ſe ſentent de ce défaut, & elles ne peuvent être auſſi parfaites que des regles fondées uniquement ſur la raiſon & la nature même des équations indépendamment de toute expreſſion arbitraire. Le premier & le plus grand défaut de toutes les methodes qu'on a données juſqu'à preſent eſt le tatonnement. Rien ne fatigue & ne rebute tant que de travailler à l'aveugle; & quoique le nombre des tatonnemens ſoit reglé, il eſt conſtant par l'experience de tous ceux qui ſe mêlent de calcul, qu'il y a une eſpece de chagrin & d'affliction d'eſprit inſéparables du mauvais ſuccès de l'operation, lorſqu'après avoir ſuivi exactement les regles on trouve qu'on a pris trop ou trop peu, & qu'il faut recommencer le calcul tout de nouveau. C'eſt, pour ainſi dire, ſe tromper avec art & me-

methode : toute operation où il entre du tatonnement eſt indigne du nom d'operation mathematique ou ſcientifique. On n'a, pour s'en convaincre, qu'à comparer les operations géometriques à celles de l'Arithmetique ordinaire. Que penſeroit-on de la réſolution d'un problême géometrique, où il faudroit tatonner & recommencer pluſieurs fois la même operation avant que d'être aſſuré qu'on eût bien operé? Je fais également abſtraction des erreurs de fait, & je ne parle que de celles qui ſont eſſentielles à la methode.

Le principal avantage de mes logarithmes eſt d'exclure abſolument tout tatonnement des operations arithmetiques, c'eſt à dire, de la diviſion & de l'extraction des racines qui y ſont eſſentiellement ſujettes dans l'Arithmetique ordinaire, & le principal avantage de ma nouvelle methode de réſoudre les équations eſt auſſi d'en exclure tout tatonnement.

Il faut remarquer qu'au lieu d'une eſpece de tatonnement qui ſe trouve dans la diviſion ordinaire, il y en a pluſieurs eſpeces plus difficiles & plus embarraſſantes dans l'extraction des racines, à meſure qu'on les tire d'une puiſſance plus élevée, ou que l'équation eſt compoſée d'un plus grand nombre de termes affectez de ſignes differens.

Dans l'extraction de la racine quarrée, outre les tatonnemens eſſentiels à la diviſion, il y en a une nouvelle eſpece de plus; parceque le diviſeur qui devroit & qui ne peut pas être $2ab + b$, car c'eſt b qu'on cherche, eſt ſeulement $2a + 1$; ainſi il ne ſuffit pas de trouver par les tatonnemens ordinaires de la diviſion le plus grand quotient qui multiplié par $2a + 1$ pro-

produiſe $2ab + b$, tel que ce produit puiſſe être ôté du dividende correſpondant, il faut qu'on en puiſſe ôter $2ab + bb$. Je ſuppoſe b plus grand que 1.

Dans l'extraction de la racine cubique le diviſeur devroit & ne peut pas être $3aa + 3ab + bb$, parceque c'eſt b qu'on cherche, & on ne peut prendre univerſellement pour diviſeur que $3aa + 3a + 1$; c'eſt pourquoi le tatonnement eſt plus grand que dans la racine quarrée : car il ne ſuffit pas de pouvoir ôter du dividende $3aab + 3ab + 1b$, il faut en pouvoir ôter $3aab + 3abb + b^3$, ainſi du reſte. Je ſuppoſe toûjours b plus grand que 1.

En un mot dans l'extraction des racines le diviſeur eſt toûjours trop petit & imparfait, & d'autant plus imparfait que la racine cherchée eſt celle d'une puiſſance plus élevée.

C'eſt encore toute autre choſe dans l'extraction numerique des racines des équations compoſées. Car le grand nombre des termes, le raport different des coefficiens, & le mêlange des ſignes + & — qui ſe détruiſent en partie, cauſe neceſſairement une très-grande incertitude dans les operations, & les tatonnemens s'y trouvent en plus grand nombre, plus pénibles, plus rebutans & plus ſujets à erreur.

Le ſecond défaut des anciennes methodes vient du choix arbitraire de la progreſſion décuple, qui fixe le raport du premier membre d'une racine cherchée au ſecond, & celui du ſecond au troiſiéme, & ainſi de ſuite ſans aucune raiſon & contre la nature de l'équation ; ce qui rend en général la réſolution plus longue & plus imparfaite.

Com-

Comme il s'agit de détruire un préjugé également ancien & général, je vais tâcher de rendre ſenſible ce défaut dont perſonne, que je ſache, ne s'eſt apperçû.

Je ſuppoſe qu'on veuille trouver le raport du rayon au côté de l'octodecagone. J'appelle le rayon a & le côté x, j'aurai cette équation à réſoudre,

$$x^3 = 3aax - a^3.$$

Et ſuppoſant le rayon $a = 100000.000$, j'aurai cette équation numerique,

$$x^3 = 300000.00000.\ 00000.0x - 100000000.\ [00000000.00000000.$$

Ou pour abreger l'expreſſion,

$$x^3 = 30^{16}x - 10^{24}.$$

Il faut trouver la petite valeur d'x.

Si l'on ſuit les methodes ordinaires de *Viete*, d'*Harriot*, d'*Ougtred*, &c. on trouvera $x = 34729.635$.

La premiere operation donnera le premier chifre 3, & celui-ci par une ſeconde operation plus longue que la premiere donnera le ſecond chifre 4. Ces deux joints enſemble & ſaiſant 34 donneront par une troiſiéme operation beaucoup plus longue que la ſeconde le troiſiéme chifre 7, & ces trois joints enſemble faiſant 347 donneront par une quatriéme operation incomparablement plus longue que les trois autres le quatriéme chifre 2, & ainſi de ſuite; enſorte qu'il y a toûjours autant d'operations à faire que de chifres à trouver dans la racine, & que la difficulté de les trouver augmente continuellement à chaque operation.

Mais ſuivant ma methode on trouvera,

Pour premier membre $\frac{1}{3}a = 33333.333\frac{1}{3}$
Pour le ſecond . . $\frac{1}{72}a = 1388.888\frac{8}{9}$
Pour le troiſiéme. $\frac{73}{5184}a = \ldots 7.413+$
Somme . . . . . $= 34729.635+$

Il eſt évident que cette derniere methode eſt incomparablement plus abregée que la premiere.

Le troiſiéme défaut eſt d'exprimer les valeurs des racines des équations numeriques par des formules irrationelles qui ſont ou tout à fait inutiles, n'étant qu'une pure petition de principe, ou qui donnent des valeurs de l'inconnue plns obſcures & plus inintelligibles après cette prétendue réſolution qu'auparavant.

Si l'on demande la valeur de x dans l'équation $xx = 7056$ & qu'on réponde, x eſt égal à la racine quarrée de 7056. $x = \sqrt{7056}$, c'eſt certainement très-mal répondre ; car c'eſt une pure petition de principe, & je n'en ſuis pas plus avancé: il faut répondre, x eſt égal à 84, & ſi l'équation eût été $xx = 7200$, il auroit fallu répondre x eſt irrationelle & ſa valeur eſt entre 84 & 85. Il eſt vrai qu'il faut encore pouvoir approcher à l'infini de la veritable valeur en fractions; car une équation numerique n'eſt parfaitement réſolue que lorſqu'on donne toutes les valeurs poſſibles rationelles en nombres, & qu'on peut approcher à l'infini des valeurs irrationelles, tout le reſte eſt chimerique.

Soit l'équation du ſecond degré $xx + 54876x = 384181$, ſi l'on répond ſuivant la formule irrationelle ordinaire $xx + ax = bb$ qui donne $x = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} - \frac{1}{2}a$; ſi, dis-je, l'on répond $x = \sqrt{753.228.025} - 27438$, on aura très-mal répondu & très-mal operé, car la racine eſt 7 ; & au lieu du grand & pénible détour qu'il faut prendre ſuivant la formule, je n'ai qu'à comparer le coefficient d'x qui eſt 54876 com-

comme diviſeur à l'homogene de comparaiſon, 384181, je vois qu'en 38, qui ſont les deux premiers chifres du dividende, 5 premier chifre du diviſeur y eſt 7 fois, & je me détermine à prendre 7, parceque comptant les chifres du coefficient comme côté, & ceux de l'homogene comme plan, je trouve cinq tranches dans le premier, & trois ſeulement dans le ſecond, ce qui marque que le coefficient eſt le terme dominant, & dans tous les cas ſemblables on peut & on doit operer de même. Après avoir trouvé 7 je le multiplie par le coefficient 54876, & j'ajoûte au produit qui eſt 384132 le quarré de 7 qui eſt 49, & la ſomme 384181 ſe trouve égale à l'homogene de comparaiſon; & s'il ſe fût trouvé un peu plus grand ou plus petit d'un nombre moindre que le coefficient, la racine auroit été irrationelle, & on auroit pû approcher à l'infini de ſa valeur ſuivant les methodes que j'ai données dans mon Traité *de l'Extraction & de l'Aproximation des racines.*

Cette remarque du terme *dominant* qui fait regarder xx comme nul, abrege l'operation indéfiniment; enſorte qu'on réſoudra dans un moment une équation qu'on ne pourroit pas réſoudre par les formules ordinaires dans un jour entier de calcul. Car il eſt aiſé de comprendre que quelque petite que ſoit la valeur cherchée, elle peut être multipliée par un nombre indéfiniment grand, & le produit augmenté ou diminué du quarré de cette même valeur ſera égal à un homogene indéfiniment grand, ce qui demande ſuivant la formule une ſuite d'operations indéfiniment longues; ce qu'on évitera par le moien de cette remarque qui s'applique également à la formule $-xx+ax=bb$.

Ceci paroît encore plus ſenſiblement dans la troiſiéme formule $xx - ax = bb$; car lorſqu'ax eſt le terme dominant, il n'y a qu'à ſuppoſer $x = a + \frac{bb}{a}$. Par exemple, ſoit l'équation propoſée $xx - 54876x = 384181$, il n'y a qu'à ſuppoſer $x = 54876 + \frac{384181}{54876}$ ⎧ 7 ou 54883 ; & lorſque bb eſt plus petit que a, il n'y a qu'à ſuppoſer bb nul, & l'on aura x égal à a pour valeur approchée.

Lorſque l'homogene au contraire eſt le terme dominant, on peut negliger le coefficient, & ne faire qu'une ſimple extraction de racine de l'homogene.

L'on ne doit donc ſe ſervir de la methode ordinaire que lorſqu'il n'y a aucun terme qui domine ſenſiblement, encore y auroit-il beaucoup d'autres remarques à faire pour trouver la valeur ou les deux valeurs cherchées le plus promptement qu'il ſoit poſſible dans chaque cas.

Mais dans les équations du ſecond degré ſi le chemin qu'on tient en ſuivant les formules eſt ſouvent trop long & trop pénible, on a du moins l'avantage d'être aſſuré qu'on arrivera au but. C'eſt ce qui ne ſe trouve pas dans les équations du troiſiéme & du quatriéme degrez, dont la plus grande partie eſt abſolument inexprimable, & le reſte eſt exprimé d'une maniere ſi obſcure & ſi embarraſſée, qu'il vaudroit beaucoup mieux laiſſer l'équation dans l'état où elle eſt propoſée, que de la réſoudre de cette maniere. Je dis que la plus grande partie eſt abſolument inexprimable, parceque toute expreſſion où il entre des nombres imaginaires, chi-

me-

meriques & contradictoires doit passer pour nulle, puisqu'elle ne peut servir à trouver la valeur cherchée de la racine; & il faut remarquer qu'on ne tombe dans ces imaginaires que par le mauvais choix qu'on fait d'un terme non dominant comme s'il étoit dominant, & qu'il dût servir principalement à trouver la racine au lieu qu'on auroit dû s'attacher à un autre terme. C'est ce que je vais tâcher d'expliquer à fonds.

On peut réduire aux trois formules suivantes toutes les équations du troisiéme degré.

$$x^3 = ax + b$$
$$x^3 = ax - b$$
$$x^3 = -ax + b$$

Je n'examine pas ici si cette réduction est le meilleur & le plus court chemin pour résoudre ces équations; car ce qui est le plus simple & le plus commode à retenir pour le Lecteur, ou le plus aisé à traiter pour l'Auteur, n'est pas toûjours le plus facile pour le Calculateur. C'est pourtant ce qu'on devroit avoir uniquement en vûe.

Dans la premiere formule $x^3 = ax + b$ le nombre des équations qu'on peut former en entier sur une même valeur est déterminé. Par exemple, si je suppose x égal à 100, je pourrai former toutes les équations suivantes,

à commencer par $x^3 = 0x + 1000000$ exclusivement.
$x^3 = 1x + 999.900$
$x^3 = 2x + 999.800$
$x^3 = 3x + 999.700$
&c. = &c. + &c.

Premiere Epoque. $x^3 = 300x + 970.000$
$x^3 = 301x + 969.900$
$x^3 = 302x + 969.800$
&c. = &c. + &c.

Seconde Epoque. $x^3 = 7500x + 250000.$
$x^3 = 7501x + 249.900$
$x^3 = 7502x + 249.800$
&c. = &c. + &c.
Troiſiéme Epoque. $x^3 = 9800x + 20000$
$x^3 = 9801x + 19900$
$x^3 = 9802x + 19800$
&c. = &c. + &c.
& finir par $x^3 = 10000x + 0$ excluſivement.

Le nombre des équations poſſibles eſt donc égal au quarré de l'inconnue moins un.

L'homogene de comparaiſon eſt le terme dominant depuis $x^3 = 1x + 999900$ juſqu'à $x^3 = 7500x + 250000$, & il eſt tellement dominant que juſqu'à $x^3 = 300x + 970000$ qui eſt la premiere Epoque, c'eſt à dire juſqu'à ce que le coefficient ſoit triple de la racine, il ſuffit de tirer la racine cubique prochainement plus grande de cet homogene pour avoir la valeur cherchée. Ainſi pour réſoudre cette équation $x^3 = 200x + 980.000$ je neglige $200x$, & je tire ſimplement la racine cubique de 980000 prochainement plus grande, & c'eſt 100.

Dans l'équation $x^3 = 7500x + 250000$ qui eſt la ſeconde Epoque, & où le coefficient eſt égal aux trois quarts du quarré de la racine, & l'homogene égal au quart du cube de cette même racine : ces deux termes dominent dans une parfaite égalité, ou plûtôt aucun des deux ne domine, & l'on peut également trouver la racine ou par l'extraction de la racine quarrée des quatre tiers du coefficient, ou par l'extraction de la racine cubique du quadruple de l'homogene. Juſques-là le cas eſt réductible ſuivant la formule de *Tartalea* $x^3 = ax + b$.

Donc

Donc $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3}}$.

Mais cette formule a deux ou trois défauts: Le premier d'engager inutilement à pluſieurs extractions de racines quarrées & cubiques, lorſqu'on peut en pluſieurs cas ne faire qu'une ſeule extraction de racine cubique, comme je viens de le faire voir dans l'équation $x^3 = 200x + 980000$.

Le ſecond de donner ſous une formule irrationelle des valeurs rationelles, ce qui oblige après un long calcul de verifier par la ſubſtitution ſi la racine rationelle trouvée eſt exacte, & ce défaut ne ſe trouve pas dans le ſecond degré.

Le troiſiéme défaut eſt que l'expreſſion de la racine eſt ſi peu naturelle, ſi obſcure & ſi envelopée, qu'elle eſt en quelque maniere connue plus diſtinctement dans l'équation même avant qu'après ſa réſolution.

En effet ſoit l'équation $x^3 = 6x + 464$, dont la racine 8 eſt exprimée ſuivant la formule par $\sqrt[3]{232 + \sqrt{53816}} + \sqrt[3]{232 - \sqrt{53816}}$. Je dis & je ſoûtiens que tout eſprit attentif & libre de préjugez, apperçoit plus clairement ou plutôt moins confuſément la valeur de l'inconnuë $x = 8$ dans l'équation $x^3 = 6x + 464$ que dans la formule $x = \sqrt[3]{232 + \sqrt{53816}} + \sqrt[3]{232 - \sqrt{53816}}$; car dans l'équation il ne s'agit que de trouver un nombre dont le cube ſoit égal à 464 plus ſix fois ſa racine, au lieu que ſuivant la formule il faut trouver, 1°. Un nombre dont le quarré ſoit égal à 53816, c'eſt

à dire qu'il faut tirer la racine quarrée de ce nombre, ce qui ne ſe peut faire exactement dans cet exemple. 2°. Il faut après avoir ajoûté la racine trouvée à 232, trouver un ſecond nombre dont le cube ſoit égal à cette ſomme. 3°. Après avoir ôté cette même racine de 232, il faut trouver un troiſiéme nombre dont le cube ſoit égal à la difference, & la ſomme de ces deux derniers nombres fera la racine cherchée. Voilà donc trois nombres inconnus à trouver dans la formule, au lieu d'un ſeul qu'il faut trouver dans l'équation : encore eſt-il impoſſible de trouver exactement aucun de ces trois nombres dès que le premier 53816 ou en général $\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3$ n'eſt pas un quarré parfait. Or j'ai démontré dans mes *Elemens d'Algebre* que ce quarré n'étoit parfait qu'en autant d'équations que la moitié de la racine contient d'unitez, c'eſt à dire, que ſi la racine eſt 8 comme dans l'exemple ci-deſſus, il n'y a que quatre équations où la formule donne la valeur cherchée après une extraction de racine quarrée, une addition, une extraction de racine cubique, une ſouſtraction, une ſeconde extraction de racine cubique & une addition; & pour parvenir à cette formule il faut prendre la moitié d'un nombre, la quarrer, prendre le tiers d'un autre nombre & le cuber, & ſouſtraire ce cube du quarré; ce qui fait en tout onze operations dans le cas le plus favorable. Or le nombre des équations poſſibles étant $xx - 1$, & celui des équations où la formule donne la valeur cherchée ſans déguiſement étant ſeulement $\frac{1}{2}x$ lorſque le nombre cherché eſt pair, ou $\frac{1}{2}x - 1$ lorſqu'il eſt impair; il eſt évident qu'il y a une in-

infinité plus de cas où la formule donne la valeur de la racine déguisée; qu'il n'y en a où elle la donne pure & simple telle qu'elle est. Car $\frac{1}{2}x$ ou $\frac{1}{2}x-1$ est un infiniment ou indéfiniment petit par raport à $xx-1$: Mais, dira-t-on, quelque déguisée ou envelopée que soit la valeur de la racine elle est exacte & tout y est connu, au lieu que dans l'équation le raport de la racine ou de son cube à un nombre donné n'est pas immédiatement connu, & ce raport est mêlé & composé avec le raport du coefficient multiplié par la racine même. Je répons,

1°. Que c'est une erreur & un préjugé de croire que la racine est connue lorsqu'on en connoît le quarré, le cube, ou telle autre puissance qu'on voudra. On ne connoît cette racine qu'après l'extraction faite, & il y a une infinité de cas où cette extraction est imparfaite.

2°. Je conviens que cette équation $x^3=464$ est plus simple & plus aisée à résoudre que celle-ci $x^3=6x+464$. Mais cette derniere toute seule, quoiqu'affectée d'un terme moien, me paroît plus simple, plus connuë, ou pour ainsi dire plus connoissable que ces trois-ci jointes ensemble $yy=53816$, $z^3=232+y$, & $u^3=232-y$; d'où résulte $x=z+u$ suivant la formule, ou si l'on veut $x=2t$, & $t^3+3rrt=232$, & $r^3+3ttr=\sqrt{53816}$.

Depuis la seconde Epoque $x^3=7500x+250000$ jusqu'au dernier cas $x^3=10000x+0$ exclusivement, c'est ce qu'on appelle le cas irreductible, parce qu'il ne peut pas être résolu suivant la formule de *Tartalea*: le terme dominant est le coefficient, & il est tellement dominant depuis la troisiéme Epoque $x^3=9800x+20000$, qu'on peut absolument negli-

ger l'homogene de comparaiſon ; & tirer ſimplement la racine quarrée approchée du coefficient pour avoir la racine cherchée en y ajoûtant une unité. Cette Epoque commence à l'endroit où l'homogene de comparaiſon eſt égal au double du quarré de la racine, & le coefficient égal au quarré de cette racine moins le double de cette même racine; ainſi pour réſoudre cette équation $x^3 = 9801x + 19900$, je tire la racine quarrée de 9801, comme ſi j'avois ſeulement $x^3 = 9801x$ ou $xx = 9801$, la racine eſt 99 que j'augmente d'une unité, la ſomme 100 eſt la racine cherchée.

Je donnerai la methode générale de réſoudre toutes ces équations, & principalement celles qui ſont compriſes entre la ſeconde & la troiſiéme Epoque qui ſont les ſeules difficiles.

Dans la ſeconde formule $x^3 = ax - b$, ſuppoſant toûjours $x = 100$, on peut former cette ſuite infinie d'équations,

à commencer par	$x^3 = 10000x - 0$	excluſivement.
	$x^3 = 10001x - 100$	
	$x^3 = 10002x - 200$	
	&c. = &c. — &c.	
Premiere Epoque.	$x^3 = 10200x - 20000$	
	$x^3 = 10201x - 20100$	
Où la racine quarrée du coefficient commence à être plus grande d'une unité que la racine cherchée.	$x^3 = 10202x - 20200$	
	&c. = &c. — &c.	
Seconde Epoque.	$x^3 = 30000x - 2000000$.	Point de partage où le coefficient 30000 eſt le triple du quarré de la racine, & l'homogene 2000000 eſt le double de ſon cube.
	$x^3 = 30001x - 2000100$	
Juſqu'ici le nombre 100 eſt la plus grande valeur d'x, après quoi il devient la plus petite.	$x^3 = 30002x - 2000200$	
	&c. = &c. — &c.	

Troi-

Troiſiéme $x^3 = 30300x - 2030000$

Epoque. $x^3 = 30301x - 2030100$. Les deux valeurs ſont 100 & 101.

Où le coefficient ſurpaſſe le triple du quarré du triple de la racine, & où les deux valeurs commencent immediatement après à ſe ſurpaſſer d'une unité.

$x^3 = \&c. - \&c.$

$x^3 = 30604x - 2060400$. Les deux valeurs ſont 100 & 102.

$x^3 = \&c. - \&c.$

$x^3 = 89869x - 7986900$. Les deux valeurs ſont 100 & 237.

$\&c. = \&c. - \&c.$

& ainſi de ſuite à l'infini

Ces racines ont donc un terme fixe de petiteſſe, & n'en ont aucun de grandeur.

Le nombre des équations poſſibles pour la même & plus grande racine eſt égal au double du quarré de l'inconnuë dans l'exemple ci-deſſus, c'eſt depuis $10001x$ juſqu'à $30000x$. Le coefficient commence dans la ſeconde formule là où il finit dans la premiere.

Enfin dans la troiſiéme formule $x^3 = b - ax$ le nombre des équations eſt abſolument infini,

à commencer par

$x^3 = 1000000 - 0x$ excluſivement.

$x^3 = 1000100 - 1x$

$x^3 = 1000200 - 2x$

$x^3 = \&c. - \&c.$

Epoque où la racine cubique de l'homogene commence à être plus grande d'une unité que la racine cherchée.

$x^3 = 1030300 - 303x$

$x^3 = 1030400 - 304x$

$x^3 = 1030500 - 305x$

$x^3 = 1030600 - 306x$

$x^3 = \&c. - \&c.$ & ainſi de ſuite à l'infini.

Cette derniere formule peut être pleinement réſoluë par la regle de *Tartalea*, ainſi je ne m'y arrêterai pas.

Il y a donc le quart des équations de la premiere formule qui eſt dans le cas irreductible, & la ſeconde formule y eſt toute entiere ſuivant

vant ce que j'ai démontré dans mes *Elemens d'Arithmetique & d'Algebre*. J'ajoûterai ici que du quart irreductible de la premiere formule qui tombe dans les imaginaires, il y en a autant d'imaginaires rationels que la douziéme partie du quarré de l'inconnuë contient d'unitez dans ſa racine; ainſi l'inconnuë étant 100, ſon quarré eſt 10000; & la douziéme de ce quarré eſt $833\frac{1}{3}$, dont la racine approchée en entiers eſt 28: c'eſt-pourquoi je dis qu'on pourra former 28 équations dans cette premiere formule du troiſiéme degré où les imaginaires ſeront rationels, & pas davantage: ce ſeront les équations où x eſt égal à

$$\begin{array}{ccc} \frac{50+-1}{} & + & \frac{50--1}{} \\ \frac{50+-2}{} & + & \frac{50--2}{} \\ \frac{50+-3}{} & + & \frac{50--3}{} \\ \text{\&c.} & + & \text{\&c.} \\ \frac{50+-28}{} & + & \frac{50--28}{} \end{array}$$

Cette remarque quoiqu'aſſez curieuſe par raport à la Theorie n'eſt d'aucun uſage dans la pratique, parce qu'on connoît auſſi peu la valeur des imaginaires rationaux que celle des irrationaux.

Dans la ſeconde formule $x^3 = ax - b$ il y a toûjours deux racines poſitives & une negative qui eſt la ſomme des deux poſitives, & cette racine negative devient la ſeule poſitive de l'équation $x^3 = ax + b$, & au contraire les deux racines negatives de celle-ci ſont les deux poſitives de l'autre.

L'ordre veut qu'on cherche toûjours la petite racine la premiere comme la plus aiſée à trouver;

ver; mais dès qu'on en connoît une, on trouvera aiſément l'autre par cette formule.

Soit c une des racines de l'équation $x^3 = ax - b$, l'autre ſera $\sqrt{a - \frac{3}{4}cc} - \frac{1}{2}c$. Par exemple,

Soit l'équation $x^3 = 19x - 30$. Soit $19 = a$, & qu'une des valeurs d'x donnée ſoit $2 = c$; donc $\sqrt{a - \frac{3}{4}cc} - \frac{1}{2}c = \sqrt{19 - 3} - 1 = \sqrt{16} - 1 = 4 - 1 = 3$ ſeconde valeur cherchée.

Et au contraire ſoit la valeur donnée $3 = c$, on aura $\sqrt{a - \frac{3}{4}cc} - \frac{1}{2}c = \sqrt{19 - 6\frac{3}{4}} - 1\frac{1}{2} = \sqrt{12\frac{1}{4}} - 1\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 2$ valeur cherchée.

Pour le démontrer il n'y a qu'à former l'équation des trois racines

$x - c = o$,
$x - d = o$,
$x + c + d = o$, l'on trouvera $d = \sqrt{a - \frac{3}{4}cc} - \frac{1}{2}c$, & réciproquement $c = \sqrt{a - \frac{3}{4}dd} - \frac{1}{2}d$.

Je commence par réſoudre la ſeconde formule $x^3 = ax - b$, parce qu'elle eſt toute entiere dans le cas irreductible, & que par cette raiſon elle a toûjours été regardée comme la plus difficile, & qu'elle eſt d'ailleurs la plus utile par raport à la triſſection de l'angle qui s'y réduit.

REGLE GENERALE.

Soit l'équation donnée $x^3 = ax - b$.

RESOLUTION UNIVERSELLE EN LETTRES.

1°. $x = \frac{b}{a} = e$ & $a - cc = d$.

2°. $x = c + \frac{b - cd}{a - 3cc} = e$ & $a - ee = f$.

3°. $x = e + \frac{b - ef}{a - 3ee} = g$ & $a - gg = h$, & ainſi de ſuite.

REMARQUE I.

On abregera la ſeconde équation en prenant $c + \frac{c^3}{a - 3cc}$ au lieu de $c - \frac{b - cd}{a - 3cc}$; car $c^3 = b - cd$ puiſque $d = a - cc$ & $c = \frac{b}{a}$.

REMARQUE II.

Lorſqu'on ne veut pas negliger les fractions, on aura,

1°. $\frac{b}{a}$ premier membre de la racine.

2°. $\frac{b^3}{a^3 - 3bb \times a}$ ſecond membre, & $\frac{b}{a} - \frac{b^3}{a^3 - 3bb \times a} = \frac{a^3 - 2bb \times b}{a^3 - 3bb \times a} = \frac{c}{d}$.

3°. $\frac{bd - ac \times dd + c^3}{add - 3cc \times d}$ troiſiéme membre, & $\frac{e}{d}$ + ce troiſiéme membre $= \frac{e}{f}$.

4°.

4°. $\frac{bf-ae\times ff+e^3}{aff-3ee\times f}$ quatriéme membre, & ainſi de ſuite.

REMARQUE III.

Il faut que a^3 ſoit égal ou plus grand que $\frac{1}{4}bb$, autrement l'équation ſeroit impoſſible ſuivant ce qui a été démontré par *Schooten* & pluſieurs autres. Dans le cas d'égalité $\frac{1}{27}a^3=\frac{1}{4}bb$, on aura $x=\sqrt{\frac{1}{3}a}=\sqrt{\frac{1}{2}b}$. Dans le cas d'inégalité la racine ſera d'autant plus aiſée à trouver que a^3 aura un plus grand raport à bb.

RESOLUTION EN NOMBRES.

Je ſuppoſe que a & b ſont les nombres entiers, & qu'on cherche la valeur d'x en nombres entiers.

1°. Prenez en nombres entiers prochainement plus grands les valeurs de tous les quotiens $\frac{b}{a}$, $\frac{b-cd \text{ ou } c^3}{a-3cc}$, $\frac{b-ef}{a-3ee}$, &c.

2°. Dès que le produit cd ou ef &c. ſe trouvera égal à b, la queſtion eſt réſolue, & on aura la valeur exacte d'x en entiers.

3°. Dès que ce produit cd ou ef &c. aiant été plus petit que b dans l'operation précedente ſe trouve plus grand dans la ſuivante, la queſtion eſt auſſi réſolue, la valeur d'x eſt irrationelle, & on a ſa valeur en entiers à moins d'une unité près.

4°. Lorſque ce produit approche fort de la valeur de b, on peut prendre pour diviſeur $a-3cc-2c-1$ au lieu de $a-3cc$, ce qui épargnera quelquefois une operation.

5°.

5°. Au lieu de prendre d'abord $\frac{b}{a}$ on peut prendre telle valeur plus grande en entiers qu'on voudra, pourvû qu'elle ſoit plus petite que la valeur d'x; ce qui ſe connoîtra aiſément par le raport des $b - cd$ ou c^3 comparé au diviſeur $a - 3cc$.

6°. Lorſque les nombres a & b ſont tels qu'un même nombre qui meſure a par ſon quarré, meſure b par ſon cube, on pourra réduire l'équation en moindres termes.

Ainſi $x^3 = 300x - 2000$ ſe réduit à $y^3 = 3y - 2$, & pour lors $x = 10y$. Cette remarque eſt générale pour toutes les équations.

7°. On peut couper a en tranches de deux chifres, & b en tranches de trois chifres de droit à gauche, & operer d'abord ſeulement ſur la premiere tranche de l'un & de l'autre; car on abregera par-là l'operation par raport au premier membre de la racine lorſqu'elle eſt fort grande.

8°. Lorſque $3cc$ ou $3ee$ &c. ſe trouvent plus grands que a, l'équation eſt impoſſible.

9°. Lorſque la racine eſt irrationelle on la trouvera en entier à moins d'une unité près, & on pourra en approcher à l'infini en fractions.

I. EXEMPLE.

Soit $x^3 = 52416x - 1244160$.

C'eſt l'exemple d'*Harriot* pages 146, 147 & 148 de ſon *Exegetique numerique*.

J'ai donc $a = 52416$

$b = 1244160$

Donc $\frac{b}{a} = \frac{1244160}{52416} \cdot = 23 +$. Je prends ſuivant

vant la regle ci-deſſus, article premier, le nombre 24 pour premier membre de la racine, je le quarre, c'eſt $576 = cc$ que j'ôte de $52416 = a$, & j'ai $a - cc = 51840 = d$ que je multiplie par le même $24 = c$, le produit eſt 1244160 qui ſe trouve $= b$; d'où je conclus ſuivant l'article ſecond de la même regle que la racine cherchée eſt 24.

Pour trouver la ſeconde racine je prends la moitié de 24, c'eſt 12 que je quarre, c'eſt 144 que je triple, c'eſt 432 que j'ôte de 52416, il reſte 51984 dont la racine quarrée eſt 228 dont j'ôte le même 12, le reſte 216 eſt la ſeconde racine cherchée.

La methode d'*Harriot* & de *Viete* demande trois pages *infolio* de calcul.

II. Exemple.

Soit l'équation $x^3 = 3x - 1$, ou $x^3 = 300x - 1000$, ou $x^3 = 30000x - 2000000$ &c. qui ſont des équations geometriquement ſemblables du côté de l'octodecagone, dont le rayon eſt 1 ou 10 ou 100 &c.

J'aurai 1°. $\frac{b}{a} = \frac{1}{3} = 3\frac{1}{3} = 33\frac{1}{3}$ &c. premier membre.

2°. $\frac{c^3}{a - 3cc} = \frac{b^3}{a^3 - 3bb \times a} = \frac{1}{72} = 013\frac{8}{9}$ &c. ſecond membre.

3°. $\frac{bd - ac \times dd + c^3}{add - 3cc \times d} = \frac{73}{984744} = 0004741\,3 +$ troiſiéme membre, ce qui donne pour le côté cherché 34729. 635 + &c.

RE-

REMARQUE.

On peut toûjours préparer l'équation par cette formule de la biſſection de l'angle $4xx - \frac{x^4}{aa} = bb$ dans laquelle a repréſente le rayon, b la corde de l'arc double, & x la corde de l'arc ſimple; on peut, dis-je, préparer l'équation de maniere que la réſolution ſoit auſſi promte & même plus promte que celle-ci.

Soit l'équation donnée dans le cas irreductible de la premiere formule $x^3 = aax + b$.

FORMULE UNIVERSELLE.

$$x = a + \frac{b}{2aa} - \frac{cd - b}{3cc - aa} - \frac{ef - b}{3ee - aa} \text{ &c.}$$

$$a + \frac{b}{2aa} = c.$$
$$cc - aa = d.$$
$$ee - aa = f.$$
&c.

c'eſt à dire que le premier membre de la racine eſt $a + \frac{b}{2aa} = c$ trop grand. On ſuppoſe enſuite $cc - aa = d$, & le ſecond membre negatif ou à ſouſtraire eſt $\frac{3cc - aa}{cd - b}$. Soit enſuite $c - \frac{cd - b}{3cc - aa} = e$, & $ee - aa = f$. Le troiſiéme membre à ſouſtraire eſt $\frac{ef - b}{3ee - aa}$, & ainſi de ſuite juſqû'à ce qu'on trouve une racine exacte en entier ou une racine approchée à moins d'une unité près lorſque cette racine eſt irrationelle.

Ex-

EXEMPLE.

Soit l'équation donnée $x^3 = 7569x + 243100$, j'ai donc $aa = 7569$ & $a = 87$ & $b = 243100$.

$$a + \frac{b}{2aa} = 87 + \frac{243100}{15138} \left\{ \begin{array}{l} 16 \text{—} = 103 \text{—} = c. \\ 91720 \\ 15138 \end{array} \right.$$

Donc $cc = 10609$ & $3cc = 31827$
$\quad - aa = 7569 \quad - aa = 7569$

Donc $cc - aa = 3040 = d$ 24258 ou
multiplié par $c = 103$ $3cc - aa$

9120
3040

produit $cd = 313120$
$\quad - b = 243100$

$cd - b = 70020$ (3—second membre.

divisé par $3cc - aa = 24258$

Le premier membre est donc 103 & le second — 3, il reste 100 pour la racine que je quarre, c'est 10000 dont j'ôte 7569, il reste 2431 que je multiplie par 100, le produit 243100 est égal à l'homogene b donné, ainsi 100 est la racine cherchée.

REMARQUE I.

Pour conserver l'analogie entiere on pourroit supposer,
Le premier membre $= a$ & $aa - aa = 0$.

Le

Le 2^{e} $= -\frac{aa-b}{3aa-aa} = +\frac{b}{2aa}$ & $a+\frac{b}{2aa} = c$.

Le 3^{e} $= -\frac{cd-b}{3cc-aa}$ & $c-\frac{cd-b}{3cc-aa} = e$.

Le 4^{e} $= -\frac{ef-b}{3ee-aa}$, & ainſi de ſuite.

REMARQUE II.

Lorſque $cd = b$ ou $ef = b$ &c. la queſtion eſt réſolue, c'eſt à dire que la racine cherchée eſt c ou e &c.

REMARQUE III.

On ſuppoſe toûjours l'équation préparée à l'ordinaire ſans fraction & ſans incommenſurables, & ſi l'on veut pour une plus grande facilité ſans coefficient à la haute puiſſance. Cette derniere préparation n'eſt pas abſolument neceſſaire, & ſi l'on avoit $cx^3 = aax + b$, il faudroit prendre pour premier membre au lieu d'a $\frac{\sqrt{aa}}{c}$, ce qui ne change rien à la methode.

EXEMPLE IV.

Au lieu de la fraction $\frac{b}{2aa}$ on peut prendre $\frac{b}{2aa+3a+1}$, ce qui abrege un peu en quelques occaſions ; mais comme $3a+1$ eſt un infiniment petit à l'égard de la quantité conſtante $2aa$, on peut le negliger.

RE-

REMARQUE V.

Il faut prendre en entiers les quotiens $\frac{b}{2aa}$; $\frac{cd-b}{3cc-aa}$, $\frac{ef-b}{3ee-aa}$, le premier par défaut & les autres par excès.

REMARQUE VI.

On ſera ſurpris que le premier membre de la racine ſe trouve plus grand que la racine même ; mais ce n'eſt qu'un préjugé, & pourvû qu'on trouve promptement cette racine, il eſt indifferent que ce ſoit par addition ou ſouſtraction.

Soit l'équation $x^3 = axx - b$.

On aura pour premier membre $a - \frac{ab}{a^3-2b} = c$

& $a - c = d$.

Pour ſecond membre . . $d - \frac{b-ccd}{3cc-2ac} = e$

& $a - e = f$.

Pour troiſiéme membre . . $e - \frac{b-eef}{3ee-2ae}$ &c.

ou bien pour premier membre a, pour ſecond $-\frac{ab}{a^3-2b}$ &c.

EXEMPLE.

On demande la ſecante de 80 degrez ou des $\frac{2}{9}$ de la circonference du cercle.

Le rayon étant 1 le ſinus de 10^d ou de la $\frac{1}{36}$ partie du cercle eſt la moitié du côté de l'octo-

de-

decagone, lequel côté eſt la petite racine de l'équation $x^3 = 3x - 1$, & la ſecante de 80^d eſt le double d'une valeur d'y dont $y^3 = 3yy - 1$; & il en eſt de même de toutes les ſecantes dont les arcs ne peuvent être donnez que par la triſſection de l'angle.

J'ai donc $a = 3$ & $b = 1$, & par conſéquent $a - \frac{ab}{a^3 - 2b} = 3 - \frac{3}{25} = \frac{72}{25} = c$, donc $cc = \frac{5184}{625}$, donc $a - c = d = 3 - \frac{72}{25} = \frac{3}{25}$, donc $ccd = \frac{15552}{15625}$ que j'ôte de $b = 1$, il reſte $\frac{73}{15625}$ que je diviſe par $3cc - 2ac = \frac{15552}{625} = \frac{432}{25}$, c'eſt à dire par $\frac{118800}{15625}$, le quotient eſt $\frac{73}{118800}$ que j'ôte de $\frac{72}{25}$, il reſte $\frac{342071}{118800} = 2.\ 879385^{VI} -$ &c. dont le double $5.\ 758770^{VI} -$ eſt effectivement la ſecante de 80^d conformément aux Tables.

DEMONSTRATION.

Pour la formule $x_3 = ax - b$.

Cubez a & quarrez b & diviſez a^3 par bb, ſi le quotient eſt $6\frac{3}{4}$ (il ne peut jamais être moindre ſuivant ce qui a été démontré par *Schooten*, comme j'ai déja dit ci-deſſus) la racine ſera $\frac{3b}{2a}$. Car ſoit $a = 3cc$ & $b = 2c^3$, on aura l'équation $x^3 = 3ccx - 2c^3$, le cube de $3cc$ eſt $27c^6$ & le quarré de $2c^3$ eſt $4c^6$ & le quotient $\frac{27c^6}{4c^6} = 6\frac{3}{4}$.

Or

Or lorſque $x^3 = 3ccx - 2c^3$, il eſt évident que $x = \frac{3b}{2a} = \frac{6c^3}{6cc} = c$; car en ſubſtituant c à la place d'x, on aura $c^3 = 3c^3 - 2c^3 = c^3$.

2°. On démontrera de même que ſi le quotient $\frac{a^3}{bb} = 7\frac{1}{9}$ la racine ou plûtôt une des racines ſera $\frac{4b}{3a}$, comme ſi l'équation eſt $x^3 = 4ccx - 3c^3$, on aura $a = 4cc$ & $b = 3c^3$, & par conſéquent $a^3 = 64c^6$ & $bb = 9c^6$; donc $\frac{a^3}{bb} = \frac{64c^6}{9c^6} = 7\frac{1}{9}$ & $\frac{4b}{3a} = \frac{12c^3}{12cc} = c$. Il eſt évident que $x = c$; car en ſubſtituant c à la place d'x dans l'équation $x^3 = 4ccx - 3c^3$, on aura $c^3 = 4c^3 - 3c^3 = c^3$.

3°. Si le quotient eſt $7\frac{13}{16}$, une des racines ſera $\frac{5b}{4a}$.

Si ce quotient eſt $8\frac{16}{25}$, on aura pour racine $\frac{6b}{5a}$.

Si ce quotient eſt $9\frac{19}{36}$, on aura $\frac{7b}{6a}$.

Si ce quotient eſt $10\frac{22}{49}$, on aura $\frac{8b}{7a}$.

Si ce quotient eſt $11\frac{25}{64}$, on aura $\frac{9b}{8a}$.

&c.

Et univerſellement ſi le quotient $\frac{a^3}{bb} = c + \frac{3c - 8}{c - 3}$ ou $= c + \frac{3c - 8}{cc - 6c + 9}$, la racine ſera

$\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$

Mais

Mais ſi le quotient ne ſe trouve pas dans la ſuite de cette progreſſion, la racine cherchée ſera neceſſairement entre les deux termes prochains de cette même progreſſion; ainſi lorſque ce quotient eſt 27 comme dans l'équation de l'octodecagone $x^3 = 3x - 1$, ou $x^3 = 12x - 8$, ou $x^3 = 27x - 27$, ou $x^3 = 48x - 64$ &c. $x^3 = 300x - 1000$ &c. la racine cherchée eſt entre $\frac{25b}{24a}$ & $\frac{24b}{23a}$, parceque lorſque $x = \frac{24b}{23a}$ le quotient $\frac{a^3}{bb} = 26\frac{70}{529}$, & lorſque $x = \frac{25b}{24a}$ le même quotient $\frac{a^3}{bb}$ eſt égal à $27\frac{73}{576}$ ſuivant la formule $c + \frac{3c - 8}{c - 3}$ pour le quotient, & ſuivant la formule $\frac{c - 2 \times b}{c - 3 \times a}$ pour la racine. Ces deux formules commencent par $5\frac{7}{4}$. $6\frac{10}{9}$. $7\frac{13}{16}$. continuant à l'infini. On a donc pour premiers membres de la racine cherchée $\frac{c - 2 \times b}{c - 3 \times a}$; & parceque $c = \frac{a^3}{bb}$ par l'hypotheſe, la fraction $\frac{3c - 8}{c - 3}$ étant un indéfiniment petit par raport aux quantitez conſtantes a, b, c, ſi l'on ſubſtituë $\frac{a^3}{bb}$ à la place de c dans l'équation $\frac{c - 2 \times b}{c - 3 \times a}$, on aura $\frac{a^3 b - 2b^3}{a^4 - 3abb}$, ou $\frac{b}{a} + \frac{b^3}{a^4 - 3abb}$, ou $+ \frac{b^3}{a^3 - 3bb \times a}$. Si l'on ſuppoſe $\frac{b}{a} = c$ (c'eſt une nouvelle valeur

leur de c differente de la formule $\frac{c-2\times b}{c-3\times a}$) & qu'on ſubſtitue cette valeur dans la fraction $\frac{b^3}{a^3-3bb\times a}$, on aura pour premiers membres de la racine cherchée cette valeur $c+\frac{c^3}{a-3cc}$ qui eſt préciſément la valeur trouvée par la regle. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Pour trouver enſuite les autres membres $e+\frac{b-ef}{a-3ee}$ &c. je ſuppoſe $c+\frac{c^3}{a-3cc}=e$, ou $ax-x^3=b$. Or puiſque e eſt plus petit que x, il s'enſuit neceſſairement que l'homogene de comparaiſon pour $ae-e^3$ ſera plus petit que l'homogene de comparaiſon pour $ax-x^3$, c'eſt à dire que le premier ſera plus petit que b. Soit donc $a-ee=f$, il s'enſuit que f eſt plus petit que b, & $b-ef$ eſt la difference des deux homogenes de comparaiſon pour les équations ſemblables,

$$ax-x^3=b. \quad ae-ee.$$
$$ae-e^3=ef=a-ee\times e.$$

Enfin pour avoir un troiſiéme homogene, puiſque x eſt un nombre entier & que e eſt plus petit, je ne puis pas ſuppoſer moins pour x que $e+1$ que je ſubſtitue dans l'équation $ax+x^3=b$, ou $a-xx=\frac{b}{x}$, ce qui me donne $ae+1a-eee-3ee-3e-1=d$, & ſi $d=b$ la queſtion eſt réſolue, & $x=e+1$; mais ſi l'homogene d eſt encore plus petit que b, il eſt évidemment plus grand que ef, parceque l'homogene de comparaiſon augmente à meſure

que la racine qui le forme augmente, & d eſt formé par $e+1$, & ef ſeulement par e: c'eſt-pourquoi je fais une regle de 3, & je dis la difference des homogenes $ae-e^3=ef$ & $ae-e^3-3ee-3e-1+1a=d$ eſt $a-3ee-3e-1$. Celle des homogenes $ax-x^3=b$ & $ae-e^3=ef$ eſt $b-ef$. La difference des racines e & $e+1$ qui ont formé les homogenes ef & d eſt 1. Je dis donc ſuivant la regle de la premiere partie de ce Traité, ſi $a-3ee-3e-1$ difference dans l'homogene vient de 1 difference dans les racines, de combien viendra $b-ef$? Le quotient $\frac{b-ef}{a-3ee-3e-1}$ donnera le troiſiéme membre de la racine ; mais parceque $3e+1$ eſt un infiniment petit par raport aux quantitez conſtantes a & b, ef, je ne prends univerſellement que $\frac{b-ef}{a-3ee}$. *Ce qu'il falloit trouver.*

Il me reſte à prouver que ce troiſiéme membre & la ſuite des autres qu'on peut trouver de la même maniere à l'infini, forment une ſomme plus petite que la racine, & qui en approche à l'infini lorſqu'elle eſt irrationelle, & c'eſt tout ce qu'on peut ſouhaiter en ces matieres.

Soient trois équations ſemblables.

$x^3=ax-b$. & ſoit $y=x+e$.

$y^3=ay-c$. & $z=y+f=x+e+f$.

$z^3=az-d$.

Je dis que ſi l'on fait comme $c-b:d-c::y-x$ à une quatriéme quantité $\frac{d-c\times y-x}{c-b}$, la com-

composée $y + \frac{d - cxy - x}{c - b}$ sera plus petite que z ou que $x + e + f$. Car en substituant on aura $ax - x^3 = b$
& $ay - y^3 = c$
ou $ax + ae - x^3 - 3exx - 3eex - e^3 = c$.
Donc $c - b = ae - 3exx - 3eex - e$ &c. & enfin on aura $\frac{afe - fbe - 3ffex - 3ffee, - 3fexx - 6eefx - 3fe^3}{ae - 3exx - 3eex - e^3}$ qui est plus petit que f, puisqu'il reste tous termes negatifs.

On prouvera de la même maniere que cette difference deviendra plus petite qu'aucune quantité donnée, & que par conséquent ou peut approcher à l'infini de la valeur de la racine lorsqu'elle est irrationelle.

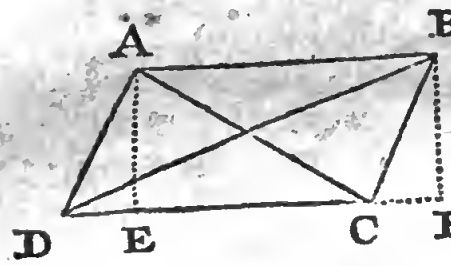
Enfin non-seulement tous les autres cas réductibles ou irréductibles du troisiême degré, mais généralement toutes les équations se peuvent résoudre par les mêmes principes, c'est à dire par la regle de trois appliquée à la difference des homogenes & à celles des valeurs qui les ont produits, ce qui est trop évident pour s'arrêter à le demontrer en detail.

SUR UNE PROPOSITION DE GEOMETRIE ELEMENTAIRE.

PAR M. DE LAGNY.

THEOREME.

*DANS tout parallelogramme la ſomme des quarrez des deux diagonales eſt égale à la ſomme des quarrez des quatre côtez.



Si le parallelogramme eſt rectangle, la propoſition eſt évidente par la 47. p. 1. Il faut la prouver dans les obliquangles.

Soit le parallelogramme obliquangle *ABCD* compris ſous les quatre côtez *AB*, *BC*, *CD*, *DA*, dont les côtez oppoſez ſont *AB*, *CD*, & *AD*, *BC*; la grande diagonale *BD* & la petite *AC*. Je dis que la ſomme des quarrez des deux diagonales *BD*, *AC*, eſt égale à la ſomme des quarrez des quatre côtez *AB*, *BC*, *CD*, *DA*.

PREPARATION.

Du point *A* de l'angle obtus *DAB* ſoit abbaiſſée ſur le côté *CD* la perpendiculaire *AE*, & du point *B* ſommet de l'angle aigu *ABC* ſur *DC* prolongé en *F* la perpendiculaire *BF*.

DE-

* 28. Juillet 1706.

DEMONSTRATION.

Les triangles *ADE*, *BCF*, ſont égaux & ſemblables, puiſque *AD* eſt égale à *BC*, & les angles *ADE*, *BCF*, de même que *AED*, *BCF*, ſont auſſi égaux, donc *DE* eſt égal à *CF*. Or par la 12. p. 2. dans le triangle obtuſangle *BDC*, le quarré du côté *BD* eſt égal à la ſomme des quarrez de *BC* & de *CD*, plus le double du rectangle de *CF* par *CD*; & par la 13. p. 2. dans le triangle *DAC*, le quarré du côté *AC* eſt égal à la ſomme des quarrez de *AD* & de *CD*, moins deux fois le rectangle du même *CD* par *DE* égal à *CF*. Donc l'excès compenſant préciſément le défaut, la ſomme des quarrez des deux diagonales eſt égale à la ſomme des quarrez des quatre côtez. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

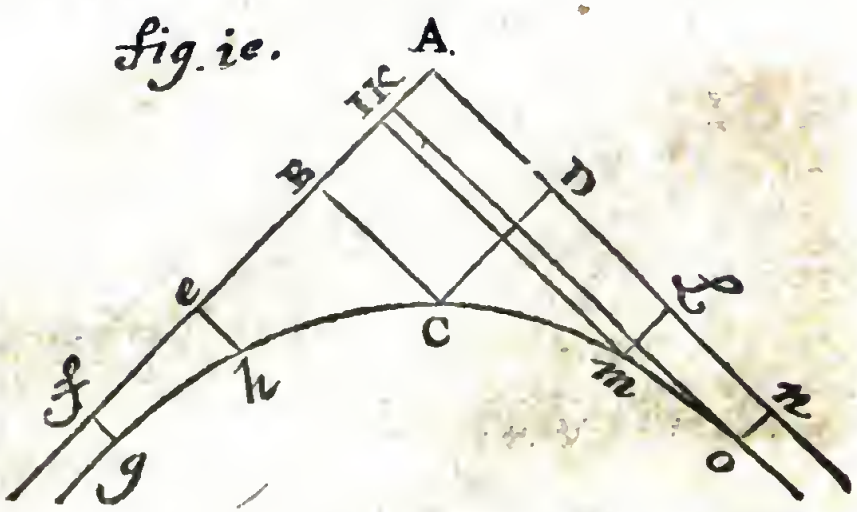
Dans tout rhombe ou lozange connoiſſant un côté & une diagonale, on connoîtra l'autre diagonale. Car puiſque les quatre côtez ſont égaux, il n'y a qu'à ôter le quarré de la diagonale donnée du quadruple du quarré du côté, le reſte ſera le quarré de la diagonale cherchée.

USAGE.

Soit un quadrilatere équilateral quelconque *ABCD* rectiligne & ſur un plan indéfini.

Si l'on prolonge indéfiniment chacun des deux côtez conjoints *AB*, *AD*, & que prenant à diſcretion un point autre que *B* & *D* ſur ces

Fig. 1e.



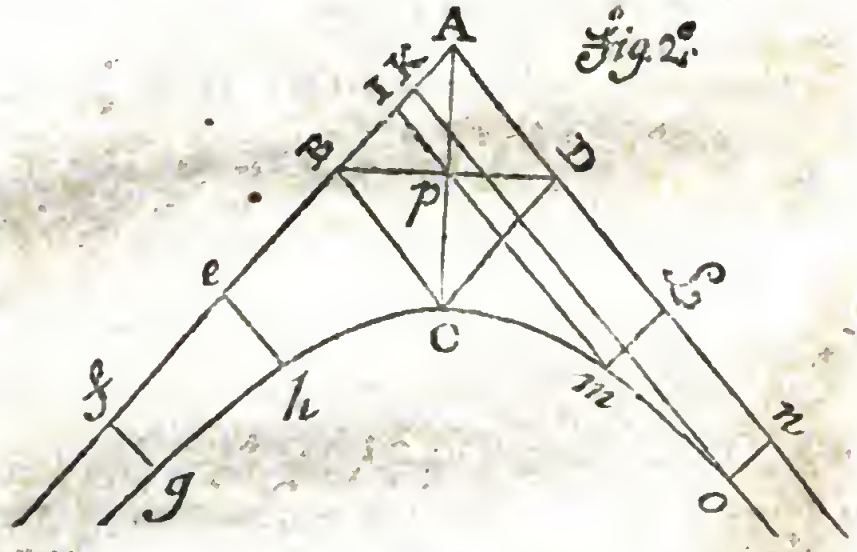


Fig. 2.

côtez prolongez, par exemple le point *e*, on tire *eb* parallele à *BC*, & qu'on faſſe comme *Ae* eſt à *AB*, ainſi *BC* à *eb*, ou que prenant entre *A* & *B* un point à diſcretion comme *I*, on faſſe comme *AI* eſt à *AB*, ainſi *AD* à *AL*, & que du point *L* on tire *Lm* parallele & égale à *AI*, & qu'on faſſe la même choſe ſur tout autre point comme *f*, *K*, &c. la Courbe qui paſſera par toutes les extrémitez des paralleles *eb*, *Lm*, *fg*, *no*, &c. ſera l'hyperbole du premier

mier genre, & elle ſera rectangle & équilatere lorſque *ABCD* ſera un quarré *Fig.* 1. Elle ſera obliquangle & ſcalene lorſque *ABCD* ſera un rhombe *Fig.* 2. Et ſi l'on opere de même ſur les deux autres côtez conjoints *BC*, *CD*, on formera les hyperboles oppoſées. Enfin ſi dans la *Fig.* 2. au lieu des deux côtez conjoints *AB*, *AD*, qui forment l'angle aigu *BAD* on prend les deux côtez conjoints *AD*, *AC*, qui forment l'angle obtus *ADC*, on formera l'hyperbole obtuſangle que j'appelle hyperbole de *ſuite* à l'hyperbole acutangle *g h C m o*, parceque leurs angles formateurs ſont des angles de ſuite, & ſe ſervent de complément l'un à l'autre. Ces hyperboles de ſuite ont leurs eſpaces aſymptotiques parfaitement égaux & ſemblables dans le tout & dans chaque partie.

C'eſt une choſe connue que le côté *AB* étant pris pour l'unité, ſi l'on prend ſur ce côté prolongé à l'infini *B e*, *e f*, &c. égaux chacun à *AB*, les lignes *AB*, *Ae*, *Af*, &c. repréſenteront la ſuite naturelle des nombres 1, 2, 3, &c. & que les eſpaces aſymptotiques *BC h e*, *BC g f*, &c. repréſenteront les logarithmes de ces mêmes nombres 2, 3, &c. & comme l'eſpace *ABCD* n'a rien de curviligne ou d'hyperbolique, il repréſente auſſi le logarithme naturel de l'unité qui eſt zero ; les lignes *AI*, *AK* repréſenteront toutes les fractions dont *AB* eſt le dénominateur, & les eſpaces aſymptotiques du côté oppoſé pris negativement, c'eſt à dire les eſpaces *DC m L*, *DC o n*, &c. repréſentent les logarithmes de ces fractions.

Il eſt, ce me ſemble, de la derniere évidence que toutes les hyperboles ſans diſtinction pouvant ſervir de modele pour la conſtruction des lo-

logarithmes, on auroit dû choisir préferablement à toutes les autres celle qui est rectangle & équilatere, comme étant certainement la plus simple & la plus reguliere: mais au lieu de suivre la nature & la raison, on s'est assujetti à l'usage arbitraire de la progression décuple, ensorte qu'aiant pris zero pour le logarithme de l'unité, comme on le doit toûjours prendre, on a pris arbitrairement 10.00000 &c. pour le logarithme de 10, au lieu que suivant la quadrature de l'hyperbole que je donnai à l'Academie le 14 Juillet 1696, le logarithme naturel de 10 (c'est à dire l'espace asymptotique qui répond à 10 fois le côté du quarré générateur de l'hyperbole rectangle & équilatere, ce côté étant 1) est ce que je trouve sans aucune ex-

230258. 50929$\frac{1}{2}$ + traction de racine par u-

ou 230258. 50930$\frac{1}{2}$ — ne methode très-simple & très-générale.

Il s'agit présentement de trouver quelle espece d'hyperbole sert de modele aux logarithmes ordinaires; il faut pour cela trouver l'aire du quadrilatere générateur *ABCD Fig.* 2.

Dans l'hyperbole rectangle & équilatere le côté *AB* étant 1, l'aire de son quarré générateur est aussi 1. Or c'est une proprieté commune à toutes les hyperboles qu'il y a toûjours même raison entre leurs segmens hyperboliques semblables, & l'aire du quadrilatere générateur. Ainsi le logarithme naturel de 2 est 69314. 71805 &c. celui de 10 étant 2. 30258. 50929 &c. le logarithme arbitraire de 10 étant 1. 00000. 00000 &c. si l'on fait cette analogie.

Comme 2. 30258. 50929 &c. est à 69314. 71805. &c. ainsi 1. 00000. 00000 à un quatriéme nombre, on trouvera pour le logarithme ar-

arbitraire de 2 ce nombre 30102. 99956+, ce qui s'accorde parfaitement avec les Tables.

Et si l'on fait de même comme 2. 30258. 50929 &c. est à 1. 00000. 00000, ainsi 1. 00000. 00000 &c. à un quatriéme nombre, on trouvera 43429. 44819 pour l'aire du rhombe générateur de l'hyperbole qui sert de modele aux logarithmes ordinaires. Cette aire & le côté 100000 étant donnez, il faut trouver les diagonales du rhombe.

Soit l'une comme $AC = x$, l'autre suivant mon Theorême, & le Corollaire ci-dessus sera $\sqrt{4.00000.00000 - xx}$. Or le produit de ces diagonales l'une par l'autre est évidemment double de l'aire du rhombe ou lozange. J'ai donc cette égalité $\sqrt{400000.00000xx - x^4} = 86858.89638$, & quarrant tout j'ai $x^4 = 400000.00000xx - 75444.67880.35157.71044$, & par conséquent $x = \sqrt{200000.00000. \pm \sqrt{32455.32119.64842.28955.}}$.

La racine de 324555. 32119. 64842. 28955. est 180154. 18985 —, & par conséquent la grande diagonale AC est $\sqrt{380154.18985}$ — entre $194975\frac{26836}{38995}$ & $194975\frac{268359}{389951}$. La petite diagonale BD sera $\sqrt{19845.24304}$ entre $44548\frac{66713}{89097}$ & $44548\frac{66711}{89096}$; leurs moitiez Ap, Bp seront 97487 &c. & 22274 &c. Prenant donc AB pour sinus total, & ces derniers nombres pour sinus des angles ABp, pAB, on trouvera que l'angle des asymptotes BAD est d'environ $25^d\ 44'\ 25''$, & par conséquent l'angle ABC de $154^d\ 15'\ 35''$, qui est aussi l'angle de l'hyperbole ob-

tuſangle ou de ſuite dont les eſpaces aſymptotiques repréſentent également les logarithmes ordinaires. C'eſt ce que j'avois avancé ſans démonſtration dans ma nouvelle Arithmetique pag. 12. ligne 21. On voit par-là que les logarithmes ordinaires ont pour modele deux hyperboles obliquangles, au lieu que les logarithmes naturels ont pour modele la ſeule hyperbole rectangle & équilatere.

COROLLAIRE II.

Connoiſſant les deux côtez qui forment un parallelogramme & une des diagonales, on trouvera l'autre en ôtant du double de la ſomme des quarrez des deux côtez, le quarré de la diagonale donnée; car le reſte ſera le quarré de la diagonale cherchée.

Soit le côté $AB=10$, & $AD=5$, la diagonale $AC=9$; on demande la diagonale BD.

Le quarré d'AB eſt 100, celui d'AD eſt 25, leur ſomme 125, le double 250, dont j'ôte le quarré de 9 qui eſt 81 quarré de la diagonale donnée, il reſte 169 quarré de la diagonale cherchée, laquelle par conſéquent eſt 13.

Autre Exemple.

Soit $AB=20$ $\quad \overline{AB}^2=400$ $\quad \overline{AC}^2=289$.

$AD=15$ $\quad \overline{AD}^2=225$

$AC=17$. $\quad$ Somme$=625$

on demande $BD=31$. double$=1250$

ôtez 289

reſte 961$=\overline{BD}^2$.

Donc $BD=31$.

Uſa-

Uſage.

Soit un corps *A* pouſſé ſuivant la ligne *AB* avec une force comme 10, & ſuivant *AD* avec une force comme 5, & que l'angle *BAD* ſoit donné de poſition tel que ſa baſe *BD* ſoit de 13; on demande, en faiſant abſtraction de la réſiſtance du milieu, quelle ligne parcourra le mobile & ſa longueur reſpective. Il eſt évident qu'il parcourra *AC* de 9.

REMARQUE I.

C'eſt en cherchant le raport de ces lignes que décrit le mobile par un mouvement compoſé de deux ou pluſieurs déterminations que j'ai trouvé mon Theorême, & il eſt aiſé d'en faire l'application générale.

REMARQUE II.

Cette maniere de déterminer l'angle *BAD*, non pas par degrez, minutes, ſecondes, &c. mais par le raport de la baſe *BD* aux deux côtez *AB*, *AD*, eſt beaucoup plus ſimple, plus geometrique & plus analytique. Il eſt aiſé de ſuppoſer un angle de tant de degrez, minutes, &c. qu'on voudra; mais ces ſuppoſitions ne peuvent s'executer actuellement & exactement. Par exemple, je puis ſuppoſer l'angle *BAD* de 20 degrez; mais je ne puis conſtruire cet angle ſans emploier l'une des trois Sections Coniques avec le cercle. Si je le ſuppoſe de 31 degrez 17′, il faudra que j'emploie une Courbe d'un genre plus compoſé que les Sections Coniques; paaceque je ſuis obligé de couper l'angle droit

trois fois en deux continuellement, trois fois en trois, & deux fois en cinq. Or je ne puis le couper avec le cercle & la ligne droite qu'une fois en trois, une fois en cinq, & autant de fois que je voudrai en deux; & pour le couper une ſeconde fois en trois, il faut emploier une des Sections Coniques; & pour le couper une ſeconde fois en cinq, il faut une Courbe plus compoſée. C'eſt la même choſe s'il y avoit des ſecondes, des tierces, &c. Il faut toûjours, lorſque ce raport eſt primitif, couper un angle donné en trois & en cinq parties égales une ou pluſieurs fois de ſuite continuellement.

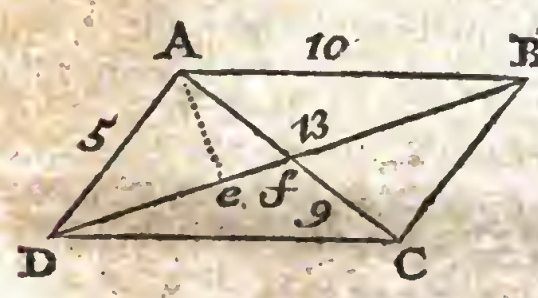
Or dans tous ces cas le raport de BD aux deux côtez AB, AD, eſt entierement inexprimable, même en nombres irrationaux. Il eſt vrai auſſi qu'en déterminant ce raport de BD, on ne peut preſque jamais déterminer exactement en nombres la grandeur de l'angle BAD: mais aiant à choiſir entre connoître exactement le raport des trois lignes AB, BD, DA, & indéfiniment près la grandeur de l'angle BAD, & pouvoir executer le tout geometriquement avec le cercle & la ligne droite, ou bien de ſuppoſer ſeulement le raport connu de l'angle BAD à l'angle droit, & le raport des deux côtez AB, AD, ſans pouvoir conſtruire actuellement cet angle, ni connoître exactement le raport de la baſe BD; il me ſemble qu'on doit ſans difficulté préferer la premiere ſuppoſition.

REMARQUE III.

Si l'on vouloit réſoudre ce Problême par la Trigonometrie, il faudroit faire vingt & une operations, & encore ne trouveroit-on qu'à peu près

près la valeur cherchée, ſans pouvoir s'aſſurer de l'avoir préciſément.

Car dans le triangle ABD, connoiſſant les trois côtez $AB=10$, $AD=5$ & $BD=13$ pour trouver l'autre diagonale AC du parallelogramme $ABCD$, voici comment il faut operer.



J'abaiſſe du point A ſur BD la perpendiculaire Ae.

1°. J'ajoûte les deux côtez AB, AD, c'eſt $10+5=15$.

2°. J'ôte AD de AB, c'eſt, $10-5=5$.

3°. Je multiplie cette ſomme par ce reſte, 15 par 5, c'eſt 75.

4°. Je diviſe ce produit par la baſe BD, c'eſt $\frac{75}{13}=5\frac{10}{13}$ pour avoir la difference des ſegmens Be, De.

5°. J'ôte cette difference de BD, c'eſt à dire, j'ôte $5\frac{10}{13}$ de 13, le reſte eſt $13-5\frac{10}{13}=7\frac{3}{13}$.

6°. Je prends la moitié de ce reſte, c'eſt $3\frac{8}{13}$ pour le ſegment De.

7°. Je prends la moitié de BD pour Df, c'eſt $6\frac{1}{2}$.

8°. J'en ôte De, c'eſt $6\frac{1}{2}-3\frac{8}{13}=2\frac{23}{26}$ valeur de ef.

9°. Je multiplie $De = 3\frac{8}{13}$ par le ſinus total 100000.

10°. Je diviſe le produit par $AD = 5$, le quotient $72307\frac{9}{13}$ eſt le ſinus de l'angle DAe.

11°. Je cherche ce ſinus dans les Tables, je trouve environ 46^d 19′ pour l'angle DAe.

12°. J'écris ſon complément 69067 pour ſinus de l'angle ADe.

13°. Je multiplie ce dernier ſinus par $AD = 5$.

14°. Je diviſe le produit par le ſinus total, le quotient eſt $3\frac{45335}{100000}$ valeur de la perpendiculaire Ae.

15°. Je multiplie Ae par le ſinus total.

16°. Je diviſe le produit par $ef = 2\frac{23}{26}$, le quotient 119716 eſt la tangente de l'angle Afe.

17°. Je cherche cette tangente dans les Tables, & je trouve environ 50^d 8′ pour l'angle Afe.

18°. J'écris la ſecante correſpondante, c'eſt environ 156005.

19°. Je multiplie cette ſecante par $ef = 2\frac{23}{26}$.

20°. Je diviſe le produit par le ſinus total, le quotient eſt $4\frac{1300376}{2600000}$ pour Af.

21°. Le double $9\frac{3}{10156}$ eſt à très-peu près la valeur cherchée de la diagonale AC, puiſqu'elle eſt préciſément 9.

Si l'on veut operer geometriquement, & ce ſont les deux ſeules methodes connues juſqu'à pre-

preſent, les huit premieres operations ſont les mêmes pour connoître le ſegment $De = 3\frac{8}{13}$ ou $\frac{47}{13}$; mais elles different dans la ſuite.

9°. Je quarre De, c'eſt $\frac{2209}{169}$.

10°. Je quarre AD, c'eſt 25.

11°. J'ôte le premier quarré du ſecond, c'eſt $25 - \frac{2209}{169} = \frac{2016}{169}$ quarré d'Ae.

12°. Je quarre $ef = 2\frac{23}{26} = \frac{75}{26}$, c'eſt $\frac{5625}{676}$.

13. J'ajoûte ces deux quarrez Ae, ef, la ſomme eſt $\frac{13689}{676}$.

14°. La racine quarrée de cette ſomme que je tire eſt $\frac{117}{26} = 4\frac{1}{2}$ valeur d'Af.

15°. Le double de cette valeur eſt 9, valeur cherchée de la diagonale AC.

Cette derniere methode eſt exacte, & on opere par extraction de racines quarrées; au lieu que par la Trigonometrie on ſe ſert de la regle de trois en quatre analogies, & qu'on ne trouve qu'à peu près ce qu'on cherche. Celle-ci ſuffit pour l'uſage civil, mais elle eſt d'une longueur prodigieuſe. L'autre eſt infiniment plus élegante, & ſatisfait plus l'eſprit. Elle ſont toutes deux incomparablement plus longues & plus embarraſſantes que la methode qui réſulte de mon Theorême ſuivant laquelle il faut,

1°. Quarrer $\overline{AB}^2 = 100$.

2°. Quarrer $\overline{AD}^2 = 25$.

3°. A-

3°. Ajouter ces deux quarrez, c'eſt 125.
4°. Doubler cette ſomme, c'eſt 250.

5°. Quarrer $\overline{BD}^2 = 169$	13
6°. Oter ce quarré du double	13
de la ſomme. de 250	39
ôtez 169	13
reſte 81.	169

7°. Tirer la racine quarrée de ce reſte, c'eſt 9 valeur cherchée de la diagonale *AC*.

Il y a donc deux fois moins d'operations par ma methode que par la methode Geometrique, & trois fois moins que par la methode Trigonometrique. Celle-ci n'eſt jamais exacte, & la mienne évite toutes les fractions où les deux autres engagent; ce qui augmente encore indéfiniment la difficulté de l'operation.

REMARQUE IV.

Ces quatre nombres 5, 10, 9 & 13 ont été choiſis avec art comme les plus ſimples pour exprimer en nombres rationaux les quatre côtez & les deux diagonales d'un parallelogramme obliquangle; de même que les trois nombres 3, 4 & 5 ſont les plus ſimples qu'on puiſſe trouver pour exprimer les trois côtez d'un triangle rectangle.

Ces quatre autres nombres 20, 15, 17 & 31 ont auſſi été trouvez par la même methode; & dans chaque cas particulier on peut donner non-ſeulement une infinité de ſolutions, mais une infinité d'infinitez, c'eſt à dire, toutes les ſolutions poſſibles en entiers & fractions. Ainſi deux côtez étant donnez en nombres, on trouvera une infinité, ou pluſieurs infinitez, ou une

ne infinité d'infinitez de fois deux diagonales commenſurables ; & au contraire ſi les diagonales, ou un côté & une diagonale ſont donnez, on trouvera le reſte.

Les Livres de *Diophante*, de Mrs. *Viete*, *Fermat*, *Frenicle*, &c. & en général de tous les Analyſtes ſont pleins de Problêmes curieux ſur les triangles rectangles en nombres. Voici un nouveau champ ouvert ſur les parallelogrammes numeriques.

PROBLEME ARITHMETIQUE.

Deux nombres étant donnez en trouver deux autres tels que la ſomme des quarrez des deux derniers ſoit double de la ſomme des quarrez des deux premiers.

LEMME.

Le double de la ſomme des quarrez de deux nombres eſt égal à la ſomme des quarrez de la ſomme & de la difference de ces deux nombres.

Soit les deux nombres a, & $a+b$.
Leur ſomme eſt $2a+b$.
Leur difference eſt b.
Le quarré du premier eſt aa.
Le quarré du ſecond eſt $aa+2ab+bb$.
La ſomme eſt . . . $2aa+2ab+bb$.
Le double de cette ſomme eſt $4aa+4ab+2bb$.
Or le quarré de la ſomme $2a+b$ eſt $4aa+4ab+bb$.
Et le quarré de la difference b eſt . . . bb.
La ſomme de ces deux quarrez eſt $4aa+4ab+2bb$. comme ci-deſſus ; donc le double de la ſomme des quarrez de deux nombres eſt égal à la ſomme

me des quarrez de la ſomme & de la difference de ces deux nombres. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Soit, par exemple, les deux nombres 1 & 2, leur ſomme eſt 3, & leur difference 1. La ſomme des quarrez eſt 5, dont le double 10 eſt égal à 9 + 1 quarrez de 3 & de 1.

Soit encore les deux nombres donnez 3 & 5, leur ſomme eſt 8, leur difference 2. La ſomme des quarrez de 3 & de 5, c'eſt à dire de 9 & de 25 eſt 34, dont le double eſt 68. Or le quarré de 8 eſt 64, & celui de 2 eſt 4, & 64 + 4 = 68.

SOLUTION GÉNÉRALE.

Soient les nombres donnez pour côtez conjoints d'un parallelogramme a & b, il faut trouver les deux diagonales commenſurables x & y; enſorte que $xx + yy = 2aa + 2bb$ ſuivant mon Theorême.

1°. Si a & b ſont égaux, comme il arrive dans le rhombe ou lozange, ce Problême eſt aiſé. Car il ne s'agit que de diviſer un nombre quarré $4aa = 2aa + 2bb = 2aa + 2aa$ en deux autres quarrez. Mais pour avoir la ſolution la plus élegante qu'il ſoit poſſible, je ſuppoſe pour le premier x & pour le ſecond $2a - \frac{b}{c}x$. Cette ſuppoſition exprime généralement tous les nombres poſſibles. b & c ſont des nombres entiers & arbitraires. On aura donc par la ſubſtitution $xx + 4aa - \frac{4abx}{c} + \frac{bbxx}{cc} = 4aa$, & par conſéquent $x = \frac{4abc}{bb + cc}$ valeur cherchée indéfinie.

Cette

Cette réſolution eſt très-ſimple, & en même temps ſi générale qu'elle renferme l'infinité d'infinitez de cas poſſibles.

Car ſuppoſant $b=1$, on aura une infinité de ſolutions en ſuppoſant ſucceſſivement $c=2$, $c=3$, $c=4$, $c=5$, &c. à l'infini.

Et ſuppoſant $b=2$, on aura une autre infinité de réſolutions en ſuppoſant ſucceſſivement $c=3$, $c=5$, $c=7$, $c=9$, &c. c'eſt-à-dire c égal à la ſuite infinie de tous les nombres impairs.

Et ſuppoſant $b=3$, on aura une autre infinité de réſolutions ſi l'on ſuppoſe ſucceſſivement $c=4$, $c=5$, $c=6$, $c=7$, $c=8$, &c. & ainſi de ſuite en combinant chaque valeur particuliere de b, avec la ſuite infinie des valeurs de c, premieres à b, on aura une infinité de reſolutions, & abſolument toutes les réſolutions poſſibles. Car pour réſoudre parfaitement ces ſortes de Problêmes, il ne ſuffit pas d'en donner une ou pluſieurs ſolutions, ni même une ou pluſieurs infinitez, il faut donner l'infinité d'infinitez de toutes les ſolutions poſſibles.

Dans cette formule $x=\frac{4abc}{bb+cc}$ les grandeurs b & c ſont parfaitement ſemblables, c'eſt à dire egalement emploiées. Ainſi c'eſt la même choſe de ſuppoſer $b=2$, & $c=3$, ou de ſuppoſer au contraire $c=2$ & $b=3$, la valeur d'x vient la même. C'eſt-pourquoi bien qu'avec $b=1$, on puiſſe ſuppoſer $c=1$, $c=2$, $c=3$, &c. & qu'avec $b=2$ on puiſſe auſſi ſuppoſer $c=1$, $c=2$, $c=3$, &c. & qu'avec $b=3$ on puiſſe encore ſuppoſer $c=1$, $c=2$, $c=3$, &c. Cependant ſi l'on ne veut avoir que des ſolutions utiles & differentes ou primitives, il faut premie-

mierement retrancher toutes les ſuppoſitions de $b=c$, c'eſt à dire de $b=1$ & $c=1$, de $b=2$ & $c=2$, de $b=3$ & $c=3$, &c. parceque la ſubſtitution donne $x=\frac{4abc}{bb+cc}=2a$, & par conſéquent $y=2a-\frac{bx}{c}=2a-x=2a-2a=0$. Or quoiqu'il ſoit vrai en un ſens que les quarrez de $2a$ & de o joints enſemble font $4aa$, ce n'eſt pourtant point ſatisfaire au veritable ſens de la queſtion, ni à l'intention de celui qui la propoſe, ou qui cherche à la reſoudre.

Secondement il faut retrancher toutes les ſuppoſitions où b & c ſont en raiſon réciproque, ou en raiſon ſemblable à quelque ſuppoſition précedente. Ainſi après avoir ſuppoſé $b=2$ & $c=3$, il eſt inutile de ſuppoſer $b=3$ & $c=2$, parcequ'on retrouveroit la même réſolution. Il eſt auſſi fort inutile après avoir ſuppoſé $b=1$ & $c=2$ de ſuppoſer $b=2$ & $c=4$, ou $b=3$ & $c=6$; & parceque la valeur d'x revient encore la même, avec cette ſeule difference que $\frac{bx}{c}$ dans le premier cas vient en forme de fraction réduite à moindres termes, & dans les autres cas en forme de fraction équivalente & réductible.

Soient preſentement les deux nombres donnez inégaux a & $a+b$, le double de la ſomme de leurs quarrez eſt $4aa+4ab+2bb$, qu'il faut partager en deux quarrez. Je ſai par le Lemme précedent que les deux côtez qui ſatisfont ſont $2a+b$ ſomme, & b difference : mais ces deux côtez qui ſatisfont arithmetiquement ne peuvent ſatisfaire geometriquement, parce-

ceque la plus grande diagonale doit être plus petite que la somme des deux côtez conjoints, c'est à dire plus petite que $2a+b$. Cependant pour résoudre ce Problême dans toute son étenduë, je fais reflexion que des deux nombres cherchez, l'un sera necessairement plus grand que $2a+b$, & l'autre plus petit b; ou, ce qui est le veritable cas de la question, l'un plus petit que $2a+b$, & l'autre plus grand que b.

Soit pour abreger $2a+b=c$, & l'un des nombres cherchez $c\mp x$, & l'autre $b\mp\frac{dx}{e}$, la somme des quarrez sera $cc\mp 2cx+xx$ & $bb\mp\frac{2bdx}{e}+\frac{ddxx}{ee}c=cc+bb$; donc $x=\frac{\mp 2bde\mp 2cee}{dd+ee}$, & le Problême est résolu.

Dans le premier cas où l'on suppose l'un des nombres $c+x$, & l'autre $b-\frac{dx}{e}$, on aura $x=\frac{2bde-2cee}{dd+ee}$; & afin que la résolution soit positive dans ce cas, on peut prendre e à discretion; mais il faut que d soit plus grand que $\frac{ce}{b}$, & plus petit que $\frac{ce}{b}+\sqrt{ee+\frac{ccee}{bb}}$. Si l'on prend d à discretion, il faut que e soit plus petit que $\frac{bd}{c}$, & plus grand que $\sqrt{\frac{ddcc}{bb}+dd}-\frac{cd}{b}$.

Dans le second cas où l'on suppose l'un des nom-

nombres $c - x$ & l'autre $b + \frac{dx}{e}$, on trouve $x = \frac{2cee - 2bd}{dd + ee}$. On peut de même prendre arbitrairement tel nombre qu'on voudra pour d ou pour e, & les reſtrictions reſpectives ſont réciproques aux précedentes.

C'eſt ainſi qu'ayant pris pour côtez d'un parallelogramme obliquangles les côtez 1 & 2, j'ai trouvé pour le cas plus ſimple les diagonales $1\frac{4}{5}$ & $2\frac{3}{5}$ en entiers les quatre nombres 5, 10, & 13.

EXPERIENCES

Sur les vertus de la racine de la grande Valeriane ſauvage.

PAR M. MARCHANT.

*IL y a pluſieurs années que liſant le Livre intitulé *Phytobaſanos* de *Fabius Columna*, Botaniſte célébre, je remarquai qu'il aſſuroit que la racine de la *grande Valeriane ſauvage*, miſe en poudre, eſt un excellent ſpecifique contre l'épilepſie; & que non ſeulement il avoit vû pluſieurs épileptiques gueris par l'uſage de la poudre de cette racine, mais qu'ayant été lui-même ſujet à l'epilepſie, il en avoit été gueri par ce remede.

L'autorité de ce ſavant homme me fit naître l'envie d'experimenter un remede ſi utile. Je tirai

* 4 Août 1706.

tirai hors de terre, au mois de Mars, des racines de cette plante, je les préparai de la maniere que *Fabius Columna* le preſcrit, & j'en donnai une priſe à un garçon de quinze à ſeize ans, qui depuis l'âge de ſept ans tomboit preſque toutes les ſemaines dans des ſymptomes épileptiques, perdant connoiſſance, & écumant de la bouche; mais ces paroxyſmes ne duroient pas plus de ſept ou huit minutes. Ce garçon après avoir pris ce remede, fut dix-huit jours ſans tomber dans ces accidens ordinaires: mais après ce temps, il retomba deux fois en huit jours, auec cette difference que chaque accès ne dura qu'environ quatre minutes. Je conjecturai que le remede avoit ſeulement remué quelques humeurs, qui avoient changé & ſuſpendu le cours de la maladie; ce qui me détermina à le purger: & enſuite je lui donnai une ſeconde priſe de la même poudre. Cette premiere purgation n'ayant preſque rien évacué; trois jours après il eut un accès d'épilepſie, qui m'obligea de le purger encore une fois; & le troiſiéme jour ſuivant, je lui fis prendre un gros & demi de la même poudre, qui lui procura une ſueur conſiderable, & lui fit vuider par bas pluſieurs vers. Quatre jours après, je lui fis encore prendre un gros de cette poudre, qui le fit ſeulement ſuer. Depuis ce temps-là, il y a environ ſix ans, il a joüi d'une ſanté parfaite.

Un de mes amis me pria de donner ce remede à une autre perſonne âgée de vingt ans & quelques mois, qui avoit été attaquée d'épilepſie depuis la quatorziéme année de ſon âge, & qui depuis ce temps-là tomboit reglément tous les mois dans des accidens dont les paroxyſmes étoient ſi violens, qu'on l'a vû dans ſon dernier

nier accès ſe débattre contre terre, & ſe rouler de bout en bout d'une cour de neuf à dix toiſes de long, en écumant de la bouche, & perdant tout ſentiment pendant plus d'une demi-heure. Ayant vû ce malade, qui avoit encore la tête pleine de contuſions par ſa derniere chute, je crus qu'avant que de rien entreprendre, il étoit à propos de le faire ſaigner; ce qui fut fait le même jour. Trois jours après je le purgeai; & l'ayant laiſſé repoſer trois autres jours, je lui fis prendre deux gros de poudre de la racine de la même plante, qui le lacherent un peu pendant la matinée; ſur l'après-midi il ſua aſſez conſiderablement, & rendit quantité de vers; & les quatre jours ſuivans, il me parut beaucoup plus gai qu'il n'avoit de coûtume: le cinquiéme jour, je lui fis encore prendre un gros de cette même poudre, qui le fit moins ſuer que la premiere fois, & lui fit encore jetter quelques vers. Il parut fort abattu par cette derniere priſe: mais depuis ce temps-là (il y a environ deux ans) il n'a reſſenti aucune attaque d'épilepſie, & il a entierement recouvré ſa ſanté.

J'ai donné avec ſuccès ce remede à pluſieurs enfans & à des perſonnes deja avancées en âge: à quelques-uns il a reculé l'accès; à d'autres il en a diminué la violence ou la durée: ce qui n'eſt pas peu de choſe dans une maladie dont la gueriſon ou même le ſoulagement ont toûjours paru ſi douteux: c'eſt encore un grand avantage que l'on peut tenter à tout âge ce remede, qui, à ce que je ſache, n'a jamais produit de mauvais effets. Une perſonne de cette Compagnie à qui j'avois indiqué ce remede, peut rendre témoignage qu'il a eu la ſatisfaction de

de voir qu'un épileptique à qui il l'avoit lui-même donné, en a été non seulement soulagé, mais même parfaitement gueri.

* *Fabius Columna* ordonne que l'on tire hors de terre les racines de cette plante, qui est la *grande Valeriane sauvage* inculte, avant qu'elle commence à montrer ses tiges, c'est à dire dans le mois de Mars; qu'après les avoir fait secher on les réduise en poudre, & que l'on donne au malade une demi-cuillerée de cette poudre, c'est à dire environ un gros & demi, dans du vin, de l'eau, du lait, ou dans quelqu'autre liqueur convenable, une ou deux fois seulement, suivant la commodité ou l'âge du malade. Pour moi j'ai toûjours donné cette poudre, autant que j'ai pû, dans un verre de vin blanc, & j'ai souvent disposé le malade par quelques purgations ou par quelques autres préparations qui dépendent de la prudence & du jugement de ceux qui ordonnent ce remede.

EXTRAIT

Des Observations faites au mois de Decembre 1705 *par* M. Bianchini, *sur des feux qui se voient sur une des Montagnes de l'*Apennin.

PAR M. CASSINI le Fils.

† EN allant de *Bologne* à *Florence*, on voit ordinairement dans le territoire de *Pietra Mala* des flâmes sur la pente d'une montagne:

* *Phytobasanos*, *p.* 120.

† 7. *Aout* 1706.

M. *Bianchini* les aiant vûes plusieurs fois de loin, voulut enfin s'en approcher pour les considerer de près. Voici comme il en parle.

Après que j'ai vû naître une flâme vive, qui dure sans interruption & sans être nourrie d'aucune autre matiere pour l'entretenir, que de celle que la nature fournit par le moien de la situation des lieux soûterrains, qui se trouvent dans la Montagne de *Pietra Mala*; je ne doute point que l'usage du feu pour nos arts n'ait été communiqué & rendu durable par quelqu'une de ces minieres vives & de ces sources de flâmes sensibles que j'ai observées dans cette Montagne. Voici la description de ce feu de *Pietra Mala*, auprès duquel je trouvai de la neige & de la glace, qui n'étoient éloignées que de quatre pieds des flâmes qui sortoient du terrein même; sur lequel la neige & la glace, qui n'étoient pas encore fonduës, restoient jusqu'à l'heure de midi. J'y allai accompagné de plusieurs étrangers pour bien examiner toutes choses, menant un guide avec nous, qui nous devoit changer de chevaux au sommet de la Montagne de *Pietra Mala*. Nous montâmes à pied du lieu de cette poste vers le midi par l'espace de deux milles ou environ, laissant à main droite le grand chemin, & descendant de l'autre côté de la Montagne par un sentier étroit, qui se terminoit à une plaine, qui pouvoit être cultivée. Nous vîmes dans le milieu de certains champs labourez un chemin où il s'élevoit plusieurs petites flâmes, qui paroissoient au-dessus de la terre élevées d'environ un demi pied, comme si elles avoient été nourries & entretenuës par du bois & du charbon. Le lieu où naissent ces flâmes est large de huit pieds *Romains*,

mains, & long de seize; & il est aussi facile de le mesurer que les autres endroits de ce champ, parcequ'on peut marcher facilement à l'entour & sur la flame même, sans craindre de trouver quelqu'ouverture ou caverne, comme sur le Mont *Vesuve*, les parties de ce terrein étant en cet endroit sans aucune division, très-contigues les unes aux autres, avec cette difference cependant que la veine du feu qui se trouve-là affermit un peu plus les mottes de terre & les pierres qui s'y trouvent, en communiquant aux unes & aux autres une couleur plus brûlée que celle qui se trouve dans les mottes de terre, & les autres pierres qui en sont voisines. Je dis la veine du feu, parceque je ne sais pas appeller autrement cette matiere inconnuë, qui produit en vingt endroits differens toutes ces flâmes que l'on voit dispersées de part & d'autre, dans un espace à peu près de cent-trente pieds en quarré, comme je le vis alors. Je crus qu'il étoit inutile de les compter chacune en particulier, parceque chacun peut faire sortir des flâmes de tout cet espace, comme il le voudra en deux manieres, par le moien d'un bâton ou de quelqu'autre chose dont on frapera legerement le terrein, ou bien en jettant seulement sur ce lieu-là de la paille, du papier, ou quelqu'autre matiere combustible.

Cependant lorsque ces matieres combustibles étoient posées dans un endroit éloigné de ces flâmes, cela n'empêchoit pas qu'elles ne prissent feu, à peu près de même que quand on jette du papier ou du linge sur du charbon ou du fer allumé, & enfin nous vîmes une de ces flâmes vives, laquelle ayant consumé les choses que l'on y avoit jettées, ne laissoit pas cependant

de durer & d'être nourrie ſans autre matiere que celle que le terrein fourniſſoit.

Nous jettâmes ſur ces flâmes ardentes des branches d'épines & autres arbriſſeaux, que nous avions ramaſſées pour cela dans le chemin, & elles brûlerent de la même maniere que ſi on les avoit jettées dans le feu ordinaire. Enſuite remarquant qu'à deux pieds près de la flâme, il y avoit quelques monceaux de neige qui n'étoit pas fonduë, & que l'on trouvoit ſous la neige éloignée de quatre pieds de la flâme des morceaux de glace; non-ſeulement je me ſouvins d'appliquer beaucoup mieux à cette merveille ce que dit le Poëte en admirant le Mont *Gibel* en *Sicile*, avec ſes neiges & ſes feux : *Scit nivibus ſervare fidem.* Mais je voulus encore faire l'experience de jetter ſur ces flâmes de la neige & de la glace. Les jetter & les voir ſe réſoudre en eau dans un inſtant, ce fut la même choſe : de même que ſi on les avoit jettées ſur un braſier bien allumé. La flâme n'en fut pas éteinte pour cela, au contraire elle en parut plus vive, & s'étendre avec plus de vîteſſe & de force ſur les pierres voiſines & ſur celles qui ſe trouvoient dans ſon chemin.

En faiſant ces experiences dans tous les environs de ce lieu, nous ſentîmes une odeur très-agréable, qui nous parut ſortir de tout ce terrein allumé, à peu près comme ſi nous euſſions été près d'un feu nourri de quelque bois odoriferant, comme pourroit être le Calambou : & cette odeur ſe rendoit plus ſenſible, lorſqu'on ſe mettoit à l'oppoſite du Soleil, & au devant de quelque petit vent qui ſoufloit au viſage, & qui augmentoit la flâme. Je pris quelques morceaux de ces pierres qui étoient pro-

proches de la flâme, & une poignée de la pouſſiere de ce terrein, qui étant frottez l'une contre l'autre faiſoient de la flâme, & avoient la même odeur que celle dont nous avons parlé ci-devant. Ces pierres étoient ſi chaudes au commencement que l'on avoit de la peine à les ſouffrir dans la main ; & en les portant ſur nous, elles conſerverent pendant un quart-d'heure cette chaleur, & beaucoup plus long-temps cette odeur agréable que nous avions ſenti ſur le lieu même. Après avoir fait ces experiences, qui me parurent ſuffiſantes pour contenter nôtre curioſité touchant l'hiſtoire de la premiere communication du feu, & qui peuvent fournir de matiere ſuffiſante aux Savans de philoſopher ſur la cauſe d'un effet ſi merveilleux de la nature, nous reprîmes nôtre droit chemin vers *Fiorenzole*.

Reflexions ſur les Obſervations de M. Bianchini.

Ce feu obſervé en *Toſcane* par M. *Bianchini*, a un grand raport à celui qui a été obſervé en *Dauphiné* par M. *Dieulamant*, & dont il eſt parlé dans l'Hiſtoire de l'Academie de l'an 1699 page 26. Le terrein que ce feu occupe eſt de 6 pieds de long ſur 4 de large. Il conſiſte dans une flâme legere errante telle qu'une flame d'eau de vie.

On ne voit point de matiere qui puiſſe ſervir d'aliment à la flâme, on s'apperçoit ſeulement qu'elle ſent beaucoup le ſouffre. On aſſure que ce feu eſt plus ardent en hyver & dans un temps humide, qu'il diminue peu à peu dans les grandes chaleurs.

Ces deux feux ont cela de commun qu'ils

ſont ſur le penchant d'une Montagne, & paroiſſent ſortir tous deux de la terre, ſans qu'il y ait aucune fente qui puiſſe avoir communication avec quelque caverne inferieure.

Ils augmentent auſſi tous les deux par l'humidité & par le froid, comme il a été remarqué dans le feu du *Dauphiné*, ce qui ſe raporte à l'effet de la neige, qui jettée ſur la flâme de *Pietra Mala*, la fait augmenter pendant qu'elle ſe fond en eau.

La difference conſiſte dans l'odeur, qui dans le feu du *Dauphiné* eſt de ſouffre, au lieu que celle qui exhale du terrein de *Pietra Mala* eſt comme aromatique.

TRAITÉ DES ROULETTES,

Où l'on démontre la maniere univerſelle de trouver leurs touchantes, leurs points de recourbement ou d'inflexion, & de reflexion ou de rebrouſſement, leurs ſuperficies & leurs longueurs, par la Géometrie ordinaire.

Avec une methode générale de réduire toutes les Lignes courbes aux Roulettes, en déterminant leur génératrice ou leur baſe, l'une des deux étant donnée à volonté.

PAR M. DE LA HIRE.

DEFINITIONS.

* J'APPELLE une *Roulette* la ligne qui eſt décrite par un point d'une ſuperficie plane, qui

* 11 Août 1706.

qui eſt toûjours appliquée ſur une autre ſuperficie plane, pendant qu'une ligne droite ou courbe telle qu'elle puiſſe être, que j'appelle la *Génératrice* de la Roulette, & qui eſt poſée ſur la même ſuperficie où eſt le point, roule ſur une ligne droite ou courbe qui ſera la *Baſe* de la Roulette, & qui eſt poſée ſur l'autre ſuperficie.

Il eſt évident par cette deſcription ou génération de la roulette, que ſa baſe ſera toûjours égale à la ligne droite ou courbe qui en eſt la génératrice, ou à toute cette Courbe ou à ſa partie, ce qui ſuit du roulement de la génératrice ſur la baſe conſiderée comme immobile.

Je n'entends pas que cette baſe ſoit terminée par la rencontre de la roulette, mais qu'elle eſt terminée par deux points tels qu'on voudra de la droite ou de la Courbe génératrice, dans leſquels elle touche la baſe au commencement & à la fin de la deſcription de la roulette, ou de quelqu'une de ſes parties; car on peut n'en conſiderer qu'une partie, & de plus il faut remarquer qu'il y a des Roulettes qui ſont infinies, ce qui dépend de la Courbe génératrice ou de la nature de la baſe.

Il n'y a point de Courbe qu'on ne puiſſe conſiderer comme une roulette, laquelle ſera formée par une ligne droite ou courbe qui lui ſervira de génératrice.

Tous les Géometres ſavent déja que toute ligne courbe propoſée peut être décrite par l'évolution d'une ligne courbe, & la ligne courbe propoſée aura pour ſa génératrice une ligne droite, laquelle roulera ſur la Courbe qui la décrit par ſon évolution, & qui lui ſert de baſe, & le point décrivant ſera un des points de la génératrice prolongée ou non prolongée.

Mais je dis encore, 1°. Que si l'on propose quelque ligne que ce soit droite ou courbe pour une roulette, & qu'on donne aussi de position une ligne droite ou courbe pour servir de base à cette roulette, on pourra determiner la génératrice de la roulette proposée.

2°. Que si l'on propose quelque ligne que ce soit pour une roulette, & qu'on donne quelque ligne droite ou courbe pour sa génératrice, & dans quelle position on voudra, où un point du plan de la génératrice est donné de position par raport à la génératrice, & ce point étant sur la Roulette dans cette position de la génératrice, on pourra déterminer la base & sa position.

Mais avant que d'entrer dans la solution de ces Problêmes, je démontrerai plusieurs proprietez particulieres des Roulettes en général, tant de leurs touchantes que de leurs points de recourbement & de reflexion, avec des methodes pour connoître les longueurs & les superficies de ces Courbes sans me servir de calcul; ce que j'avois déja expliqué en partie dans un Memoire que je lûs à l'Academie au mois de Juin 1698, & qui n'a point été imprimé.

Le point qu'on appelle *Flexus contrarius*, de *Recourbement* ou d'*Inflexion*, est celui où une ligne courbe se tourne en deux sens contraires; & le point de *Reflexion* ou de *Rebroussement* est celui où elle paroît comme se reflechir & retourner vers le même côté où elle étoit.

DE-

DETERMINATION

Des Touchantes des Roulettes, & de leurs points de Recourbement & de Reflexion.

* I. Si dans quelque position que soit la ligne génératrice *EAB* d'une roulette sur sa base *AY* qu'elle touche au point *A*, on mene une ligne droite *AP* du point touchant *A* au point décrivant *P*, la perpendiculaire *PF* à cette ligne *AP* par le point *P*, sera touchante de la Roulette dans ce même point *P*.

II. Si du point *A* on mene la ligne *AC* qui touche en *C* la ligne *NC*, laquelle décrit par son évolution la génératrice *EAB*; & de même si du point *A* on mene la ligne *AO* qui touche en *O* la ligne *MO* qui décrit aussi par son évolution la base *YA*, & comme *CA* & *OA* sont toutes deux perpendiculaires à la génératrice & à la base qui se touchent en *A*, elles ne feront qu'une même ligne droite *CAO* par le Lemme suivant; c'est-pourquoi si l'on fait comme *CO* à *CA*, ainsi *AO*, à *AV*, & que sur *AV* comme diametre on décrive le cercle *AXV*, on connoîtra par son moien de quel côté la convexité de la roulette *SPR* doit être tournée à l'égard de sa touchante *PF* & du point *A*. Car si le point *P* qui décrit la roulette est au dedans du cercle *AXV*, la convexité de la roulette au point *P* sera tournée vers le point *A*, & la roulette sera au dessus de sa touchante *PF* par rapport au point *A* comme dans cette Figure. Au contraire si le point *P* décrivant est hors le cercle *AXV* dans cette même position

* FIG. I.

de la génératrice & de la baſe, la concavité de la roulette ſera tournée vers *A*, & ſa touchante *PF* ſera au deſſus par rapport au point *A*. Enfin ſi le point décrivant ſe trouve ſur le cercle, le point *P* décrivant ſera dans le recourbement de cette roulette.

III. Si ſur le cercle *AXV* on prend quel point on voudra pour le point décrivant d'une roulette dont la génératrice ſoit dans la poſition *EAB* touchant la baſe *AO* au point *A*; je dis que ce point ſera celui du recourbement de la roulette décrite par ce point. Ainſi ce cercle ſera le lieu du recourbement de toutes les roulettes décrites ſur cette baſe, & par cette génératrice quand elle touche ſa baſe au point *A*, les roulettes étant décrites par les points de ce cercle.

Mais il faut remarquer que dans les mouvemens de la même génératrice ſur la même baſe poſée immobile, le cercle comme *AXV* change de grandeur & de poſition; ce qui eſt évident par ſa deſcription, ce qui fait qu'une infinité de points du plan de la génératrice peuvent être les points de recourbement de roulettes décrites par ces points.

Il s'enſuit donc auſſi que les touchantes des roulettes dans tous les points de recourbement, pour une même poſition du cercle *AXV*, paſſeront toutes par l'extrémité *V* de ſon diametre *AV*, puiſque ces touchantes feront toûjours des angles droits avec celles qui ſeront menées du point de contact *A* de la baſe & de la génératrice, aux points de la circonference du cercle.

IV. La figure génératrice étant donnée, & le point décrivant étant auſſi donné de poſition ſur le

le plan de cette figure, on peut déterminer le point ſur la figure génératrice lequel touchant la baſe, le point décrivant ſera dans le recourbement de la roulette. Et l'on peut auſſi déterminer l'eſpace ſur le plan de la génératrice, dans lequel aiant pris quel point on voudra pour le point décrivant, la roulette aura un recourbement, & le point décrivant étant pris hors cet eſpace, la roulette n'aura point de recourbement.

V. On déterminera auſſi le point de reflexion de la roulette ſi elle peut en avoir un, par rapport à la longueur de la génératrice & à la poſition du point décrivant, lequel ſera toûjours celui où ſe trouve le point décrivant lorſque la plus petite ou la plus grande ligne menée du point décrivant à la génératrice, ſera perpendiculaire ſur la baſe, ou bien, ce qui eſt la même choſe, lorſque le point de rencontre de la plus petite ligne menée du point décrivant à la génératrice & de la génératrice, ſera ſur la baſe.

Démonſtration des Touchantes.

Soient deux points * *A* & *E* ſur la baſe *EAG* d'une roulette leſquels ſoient indéfiniment proche l'un de l'autre, & deux perpendiculaires *AO*, *EO* à la baſe en *A* & en *E* qui ſe rencontrent en *O*. Soient auſſi deux points *A* & *B* ſur la génératrice autant éloignez l'un de l'autre que les points *AE* ſur la baſe; & ſoient encore les perpendiculaires *CA*, *CB* ſur la génératrice leſquelles ſe rencontrent en *C*. Soit enfin le point *P* qui décrit la roulette quand la génératrice roule ſur la baſe.

* FIG. II.

Lorſque les lignes *OA*, *CA* ſeront jointes enſemble, le point décrivant *P* ſera ſur la roulette; & lorſque les lignes *OE*, *CB* ſeront auſſi jointes enſemble directement en *OEQ*, & le point *B* de la génératrice ſur le point *E* de la baſe, le point *P* décrivant étant parvenu en *S*, auſſi le point *S* ſera la roulette.

Mais aiant mené les cordes *AE*, *AB* qui ſont égales entr'elles par la ſuppoſition, & qu'on peut regarder comme les arcs puiſqu'on les a pris indéfiniment petits & égaux entr'eux; je conſidere le mouvement du point *P* de la roulette à ſon point *S*, qui eſt auſſi celui de la ligne *BC* en *EQ*, comme étant compoſé de deux mouvemens, dont le premier ſera lorſque la corde *AB* eſt jointe à la corde *AE*, dans lequel mouvement la ligne *AC* ſe ſera mûe en *AM*, & par conſéquent le point *C* ſera paſſé en *M* & la ligne *BC* en *EM*; donc l'angle *CAM* ſera égal à l'angle *BAE*. Mais auſſi par le même mouvement le point *P* ſera venu en *Z*, & l'angle *PAZ* ſera auſſi égal à l'angle *BAE* & à l'angle *CAM*.

Le ſecond mouvement eſt celui que fait la ligne *EM* pour venir en *EQ* où elle eſt jointe directement à la ligne *OE*; & par ce mouvement le point *Z* ſe ſera mû pour venir en *S*, la ligne *EZ* s'étant mûe en *ES*, en faiſant l'angle *ZES* égal à l'angle *MEQ*. D'où il ſuit que les deux angles enſemble *PAZ*, *ZES* ſont égaux au ſeul angle *CEQ*; car on regarde les points *B* & *E* comme un ſeul point.

Mais par la conſtruction, puiſque les lignes *AB*, *AE* ſont égales entr'elles & indéfiniment petites, les angles *CBA*, *CAB* ſeront égaux, de même que les angles *OEA*, *OAE*; & par con-

conſéquent l'angle *MAC* ſera égal à l'angle *MEQ* & égal à *BAE*. Donc auſſi leurs égaux *PAZ*, *ZES* ſeront égaux entr'eux & à l'angle *BAE*. Et ce ſera toûjours de même quelque diſpoſition que les lignes *AO*, *EO*, & *AC*, *BC* aient entr'elles, ſoit qu'elles concourent comme dans cette Figure les unes au deſſus, & les autres au deſſous des cordes ou de la roulette, ſoit qu'elles concourent d'un même côté, & ſoit enfin qu'il y en ait de paralleles entr'elles, ce qui ne fera que des cas particuliers de cette démonſtration générale.

Maintenant il eſt facile à voir que puiſque les deux angles *PAZ*, *ZES* ſont égaux entr'eux, & enſemble égaux au ſeul angle *CEQ*, ſi l'angle *AZE* ou ſon égal l'angle *APB*, car le triangle *APB* dans le mouvement s'eſt placé en *AZE*, eſt égal à l'angle *CEQ*, les lignes *AP*, *ES* ſeront paralleles entr'elles ; & par conſéquent ſi par le point *P* on mene la ligne *PF* perpendiculaire à *PA*, le point *S* ſera dans la ligne *PF*. Mais ſi l'angle *AZE* eſt plus petit que *CEQ*, le point *S* ſe trouvera au-deſſous de *PE*; au contraire s'il eſt plus grand il ſera au-deſſus.

On voit par-là que la poſition des points de la roulette comme *S* par rapport au point *P* ſur la ligne *PF* laquelle eſt perpendiculaire à *AP*, dépend de la grandeur de l'angle *APB* par rapport à l'angle *CBQ*, ou bien des deux angles *OCB*, *COE* qui ſont enſemble égaux à l'angle *CBQ* ou *CEQ*, puiſque les points *B* & *E* ne ſont conſiderez que comme un ſeul point, & que l'angle *CEQ* eſt l'exterieur du triangle *COE*.

Maintenant ſi l'on mene la ligne *PD*, qui

faiſant avec *AP* l'angle *APD* égal à l'angle *APB*, rencontre la génératrice en *D*, & qu'on prenne ſur la baſe l'arc *AG* égal en longueur à l'arc *AD*, & qu'on mene *OGH* perpendiculaire à la baſe en *G*, & *DC* perpendiculaire à la génératrice en *D*, les points *D* & *C* n'étant conſiderez que comme un ſeul point, on fera la même démonſtration que ci-devant, enſorte que ſi l'angle *CGH* eſt égal à l'angle *DPA* & égal à l'angle *APB* ſon égal par la conſtruction, l'angle *CEQ* étant auſſi égal à l'angle *APB*, il eſt évident que le point *R* de la roulette qui ſera déterminé comme le point *S*, ſera auſſi ſur la ligne *FPF*; & par conſéquent la ligne *PF* touchera la roulette en *P*; car en général ſi une ligne droite rencontre une Courbe en deux points qui ſoient indéfiniment proche l'un de l'autre, la droite touchera la Courbe dans ces points conſiderez comme un ſeul point: mais ſi l'angle *CGH* eſt plus petit que *DPA*, lorſque l'angle *CEQ* eſt auſſi plus petit que l'angle *APB*, le point *R* ſera au-deſſous de *FPF* comme le point *S*; & par conſéquent la ligne *FPF* touche la roulette en *P* qui en eſt un point. Et ſi l'angle *CGH* eſt plus grand que l'angle *DPA*, & que l'angle *CEQ* ſoit auſſi plus grand que l'angle *APB* égal à *DPA*, le point *R* de la roulette ſera au-deſſus de la ligne *FPF* comme le point *S*, & *FPF* touchera la roulette en *P*.

Mais s'il arrivoit que l'angle *CEQ* étant égal à l'angle *APB* le point *S* étant ſur *PF*, & que l'angle *CDH* fût ou plus grand ou plus petit que l'angle *DPA*, le point *R* étant alors au-deſſus ou au-deſſous de *PF*, ce qui peut arriver par la diſpoſition des perpendiculaires *CD*, *OG*,

OG, alors la ligne *FPF* ne laiſſeroit pas d'être touchante de la roulette, mais le point *P* en ſeroit le recourbement, puiſque dans les points de la roulette entre *P* & *R* ou *P* & *S*, il ne pourroit arriver que ce qu'on vient de démontrer, où une ligne comme *FPF* toucheroit la roulette dans ſon point *P*; car les autres points d'un côté & d'autre de *P* à une diſtance indéfiniment petite demeureroient au-deſſus d'un côté & au-deſſous de l'autre de la ligne *FPF*, le recourbement n'étant que dans un point, à moins que toute la roulette ne fût une ligne droite, auquel cas tous ces points ſeroient des recourbemens.

Il s'enſuit donc de ceci que ſi l'angle *CEQ* eſt égal à l'angle *APB*, & le point *S* qui doit être indéfiniment proche de *P* étant ſur la ligne *PF*, ce point *P* ſera le recourbement de la roulette qu'il décrit.

Ce que je viens d'expliquer touchant la poſition de la roulette par rapport au point *A*, ne doit s'entendre que lorſque les points *C* & *O* qui ſont les rencontres des perpendiculaires à la génératrice & à la baſe, ſont des deux côtez du point *A*; mais s'ils ſont tous deux du même côté, ce ſera tout le contraire, ce qui ne change rien à la démonſtration.

Demonſtration du point de recourbement.

* Il ſera maintenant facile de déterminer la poſition du point *P* quand il eſt dans le recourbement de la roulette, ſi elle peut en avoir un, ce qui paroît dans la ſolution de ce Problême. Car le point *C* étant le concours de deux perpen-

* FIG. III.

pendiculaires en *A* & en *E* indéfiniment proche l'une de l'autre sur la génératrice ; ou bien, ce qui est la même chose, le point *C* étant le point touchant de la ligne menée du point *A* à la ligne qui décrit par son évolution la génératrice, si sur le diametre *AC* on décrit un demi-cercle *CXA*, quand le point *P* décrivant sera dans la circonference de ce cercle, il sera aussi dans le recourbement de la roulette qu'il décrit, pourvû que la base soit une ligne droite : car alors l'angle *CEQ* qui sera égal à l'angle *ACE*, sera aussi égal à l'angle *APE*, puisque le point *P* est dans la circonference du cercle *APC*, & que le point *E* peut être considerē comme étant sur la génératrice, sur la base de la roulette & sur le cercle *AC*, à cause que *AE* est une partie indéfiniment petite, & que le cercle touche la base qui est une ligne droite dans le point *A*, laquelle touche aussi la génératrice dans ce même point *A*.

Il faut remarquer que la position & la grandeur du cercle *AXC* ou *AXV* change dans toutes les differentes positions de *CO*, & que dans chaque position il fera connoître seulement si le point *P* décrivant est dans le recourbement de la roulette, & si la roulette a sa convexité ou sa concavité tournée vers *A* : mais il sera le lieu du point de recourbement de toutes les roulettes formées sur la même baso & sur la même génératrice dans la position où elles se touchent en *A*, quand les points décrivans y seront placez. Ce n'est pas que d'autres points décrivans ne puissent donner des roulettes qui auront des recourbemens, mais ce sera hors cette position, comme je l'explique plus au long dans le cas suivant.

Mais

Mais si la base est une * Courbe, & que le point *O* soit le point touchant de la ligne droite *CAO* sur la Courbe qui décrit par son évolution celle de la base, aiant fait comme *CO* à *CA*, ainsi *AO* à *AV*, & sur *AV* pour diametre aiant décrit le cercle *AXV*, je dis que ce cercle est le lieu du recourbement de la roulette lorsque son point décrivant *P* se trouvera sur la circonference de ce cercle dans cette position de la génératrice & de la base; & quand le point *P* sera hors ce cercle, la concavité de la roulette sera tournée vers *A*; au contraire sa convexité sera tournée vers *A* quand le point *P* sera dans le cercle.

La démonstration en est facile après ce que j'ai démontré; car dans les triangles dont deux des angles sont indéfiniment petits, & par consequent le troisiéme indéfiniment grand, on peut considerer que les angles sont entr'eux comme les côtez opposez à ces angles: c'est pourquoi au triangle *CEO* le côté *CO* est au côté *CE* ou *CA*, car on les suppose égaux, comme l'angle *CEO* ou son supplément *CEQ* à l'angle *COE*. Mais aussi au triangle *VOE* le côté *OE* est à *EV*, ou bien les lignes *AO* à *AV* qui leur sont supposées égales, comme l'angle *OVE* à l'angle *VOE*. Mais à cause que *CO* est à *CA* comme *AO* à *AV*, l'angle *CEQ* sera à l'angle *COE* comme l'angle *OVE* à l'angle *VOE* ou *COE*; donc l'angle *CEQ* sera égal à l'angle *OVE* ou *AVE*, qui sera égal à *APE* à cause de la circonference du cercle *AXV*; & par ce qui a été démontré d'abord les points *S* ou *R* de la roulette & qui sont indéfiniment proche de *P*, seront sur la ligne *PF* perpendiculaire à *AP*, & par conséquent la roulette

* Fig. IV.

se-

ſera dans ſon recourbement en *P*; car ſi la roulette étoit décrite, & qu'elle coupât le cercle *AXV* dans quelque point comme *P*, & que ce point fût alors ſur le cercle & dans la poſition où il décrit la roulette lorſque la baſe & la génératrice ſe touchent en *A* ſur *CO*, il s'enſuivroit que le point *P* de la roulette ſeroit dans ſon recourbement : mais ſi dans cette poſition de la baſe & de la génératrice, le point décrivant *P* ſe trouvoit au dedans du cercle *AXV*, l'angle *APE* ſeroit obtus, & par ce qui a été demontré d'abord des touchantes, la convexité de la roulette ſeroit alors tournée vers *A*, & ce ſeroit le contraire ſi le point décrivant étoit hors le cercle, car ce ſeroit la concavité de la roulette qui ſeroit tournée vers *A*.

On remarquera auſſi qu'on peut placer le cercle *AXV*, dont on a déterminé le diametre *AV*, de l'autre côté de *A*, & ce ſera la même démonſtration, ce diametre étant toûjours ſur *CO*.

* On fera la même démonſtration pour la roulette dont la courbure de la baſe aura ſa convexité tournée du même côté de celle de la génératrice; car on fera auſſi comme *CO* à *CA*, ainſi *AO* à *AV*, & *AV* ſera le diametre du cercle, qui eſt le lieu du point décrivant, quand ce point eſt ſur le recourbement de la roulette; & l'on aura dans le triangle *COE* le côté *CO* au côté *CE* ou *CA*, comme l'angle *CEO* à l'angle *COE*. Mais au triangle *VOE* le côté *OE* eſt à *EV*, ou bien *AO* à *AV*, comme l'angle *OVE* à l'angle *VOE*, ou ſon ſupplément *AOE* qui eſt le même que *COE*. C'eſt pourquoi l'angle *CEO* eſt à l'angle *COE*, comme l'angle *OVE* ou *AVE* à l'angle *COE*, & par

* FIG. V.

par conſéquent l'angle *CEO* ſera égal à l'angle *AVE* ou à l'angle *APE*, & dans la formation de la roulette quand le point *E* de la génératrice ſera placé ſur le point *e* de la baſe, & que le point *P* décrivant ſera avancé d'un pas, quoiqu'indéfiniment petit, la ligne *CE* ſera placée ſur *OE*. *Et c'eſt ce qu'il falloit démontrer.*

Les differentes poſitions des points *O* & *C* à l'égard du point *A* ne changent rien à cette démonſtration, & l'on peut ſeulement remarquer que ſi le point *O* ou le point *C* ſont à diſtance infinie, le point *V* ne laiſſera pas d'être déterminé, comme ſi le point *O* eſt à diſtance infinie, ce qui fait la baſe en ligne droite au moins dans le point *A*; car le point *O* à diſtance infinie pourroit ne convenir qu'à un point de la baſe qui ſeroit celui de ſon recourbement, & alors par la regle, *CO* infinie étant à *CA*, comme *AO* infinie à *AV*, ou bien *CO* à *AO* qui ſont deux infinies, leſquelles ne different que d'une finie *CA* pouvant être reputées comme égales, doivent auſſi donner *CA* & *AV* égales; c'eſt-pourquoi le point *V* tomberoit au point *C*, ce qui revient à ce que j'ai dit de la roulette qui a pour baſe une ligne droite. De même ſi le point *C* eſt à diſtance infinie, *CO* infinie eſt à *CA* infinie reputées comme égales entr'elles, comme *AO* à *AV* qui doivent auſſi être égales.

* Il y a pluſieurs cas remarquables dans ces ſortes de roulettes; mais je ne m'y arrêterai pas à cauſe que ce ne ſont que des déterminations particulieres, ſi ce n'eſt à celui-ci, où la baſe & la génératrice ſont deux cercles dont les con-

ve-

* Fig. VI.

vexitez ſont tournées du même côté, & dont le diametre de la baſe eſt double de celui de la génératrice ; car alors par la regle le point *V* tombera au point *O* qui eſt le centre de la baſe, & par conſéquent le cercle qui eſt le lieu du recourbement de la roulette ſera le même que le générateur ; de ſorte que ſi le point décrivant eſt ſur le cercle générateur, toute la roulette ſera un recourbement, c'eſt-à dire, que ce ſera une ligne droite : car dans toutes les differentes poſitions du cercle générateur le point décrivant *P* ſera toûjours ſur le même cercle *AVX*.

Mais ſi le point décrivant eſt au dedans ou au dehors du cercle générateur, il eſt évident que la roulette ne peut avoir de recourbement ; car ce point ne pourra jamais ſe trouver ſur le cercle générateur qui eſt le même que *AVX* dans toutes ſes differentes poſitions, & alors ſi le point *P* eſt au dehors du cercle générateur, la Courbe de la roulette aura ſa concavité tournée vers le point *A* ſuivant la regle, & s'il eſt au dedans ce ſera ſa convexité qui ſera tournée vers ce même point *A*.

Mais ce qu'il y a de plus remarquable dans cette eſpece de roulette, c'eſt que ce ſera toûjours une ligne elliptique, hormis quand le point décrivant eſt au centre *C* du cercle générateur ; car ce ſera un cercle, & une ligne droite quand il eſt ſur la circonference comme j'ai déja dit. Voici comme je démontre que ces roulettes ſont des Ellipſes.

* Soit la baſe *BAEF*, le cercle générateur *OXA* & le point décrivant *P* ſur ſon diametre *OCA*. Aiant fait *AH* égale à *OP*, du point *O* pour centre & pour rayons *OP*, *OC*, *OH* ſoient

* FIG. VII.

soient décrits les cercles *PI*, *CM*, *HNT*, & le cercle générateur étant transporté en *OZE* & le point décrivant *P* en *R*; je dis que le point *R* est sur la circonference d'une Ellipse dont *OP* est la moitié du petit axe, & *OT* égale à *OH* est la moitié du grand axe.

Lorsque le cercle générateur est parvenu en quelle position on voudra, comme en *OZE* en roulant sur la base *AE*, son diametre étant placé en *OE*, il est évident que le point *O* sera parvenu au point *L*, ensorte que l'arc *OL* sera double de l'arc *AE*; car le cercle de la base a son diametre double de celui du générateur. Mais aussi l'arc *CM* qui est égal à l'arc *AE*, sera la moitié de l'arc *OL*, & la corde *OL* sera double du sinus *MD* de l'angle *COM*, qui est la moitié de l'angle *OML*. De plus la ligne *MG* parallele à *OC* fera l'angle *OMG* égal à *MOC*, & par conséquent *MG* sera perpendiculaire sur *OL* & la coupera en deux également en *G*, & le point *L* sera sur *OT* perpendiculaire à *OA*. Mais puisque le point *O* de la circonference du cercle a été transporté en *L*, le diametre *OCA* sera transporté en *LM*, & le point *P* décrivant sera par conséquent sur *LM* en *R*, *LR* étant égale à *OP* ou à *OI*: c'est-pourquoi *IR* sera parallele à *OL*. Enfin si l'on mene *RN*, le triangle *MRN* sera isoscele; car les lignes *MR*, *MI*, *CP*, *CH*, *MN* sont égales: c'est-pourquoi les points *IRN* seront dans la circonference d'un cercle dont *IN* est le diametre, & par conséquent l'angle *IRN* sera droit. Mais *IR* est perpendiculaire à *OA*, donc *RN* sera parallele à la même *OA*. Il est donc évident par la génération des Ellipses que le point *R* sera sur l'Ellipse *PRT* qui a pour ses demi-

axes les lignes *OP*, *OH* qui ſont les rayons des cercles *PI*, *HNT*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Ce ſera la même démonſtration pour la roulette Elliptique, qui ſera décrite par un point placé hors le cercle générateur, & qui peut être toûjours ſur un diametre.

Par ce qui a été démontré ci-devant, il eſt facile à voir que le changement de grandeur & de poſition qui peut arriver au cercle qui eſt le lieu du recourbement des roulettes, ne change rien à ce que j'en ai déterminé, car il ne peut apporter que quelques varietez à la figure de la roulette qui pourra avoir pluſieurs recourbemens, ce qu'on pourra connoître facilement par la regle que je viens de donner.

On peut connoître par ce que j'ai démontré juſqu'ici, que dans chaque poſition du cercle *AXV*, toutes les roulettes qui auront leurs points décrivans dans ſa circonference, ſeront auſſi toutes dans leur recourbement dans ces mêmes points. Ainſi l'on peut déterminer quelles ſeront les roulettes décrites par la même génératrice & ſur la même baſe qui peuvent avoir des recourbemens, puiſque cela dépend des lignes qui par leur évolution décrivent la génératrice & la baſe, leſquelles déterminent tous les cercles poſſibles comme *AXV* ſur ces données; & il eſt certain que s'il y a quelque eſpace déterminé où ſe trouvent ces cercles, ce ſera auſſi dans cet eſpace où tous les points qu'on y prendra pourront décrire des roulettes qui auront un ou pluſieurs recourbemens; mais que hors cet eſpace les points décrivans ne donneront point de roulettes qui aient des recourbemens. On en verra un exemple dans ce qui ſuit, où je démontre comment on peut déterminer ſur la gé-

né-

nératrice le point où elle doit toucher la baſe, pour faire que le point décrivant ſoit dans ſon recourbement, la génératrice & la baſe étant données, & la poſition du point décrivant ſur le plan de la génératrice.

* Soit donc, par exemple, la parabole *ABD* pour la génératrice d'une roulette, dont la baſe eſt le cercle *LAM* qui a pour centre le point *O*, & le ſommet de la parabole touchant le cercle *LM* au point *A*: ſoit auſſi la ligne courbe *GKG* qui décrit la parabole par ſon évolution. Le point *O* repréſente auſſi la ligne qui décrit le cercle par ſon évolution. C'eſt pourquoi ſi de tous les points de la Courbe *CKG* on mene des touchantes à cette Courbe, ou des perpendiculaires à la parabole, comme *KB*, *GD*, & qu'on les prolonge en *E* & en *F*, enſorte que *BE*, *DF* ſoient égales à *AO* qui ſeront les perpendiculaires menées de la ligne *O* qui décrit le cercle par ſon évolution, juſqu'aux points du cercle qui répondront aux points *BD* de la parabole quand elle roulera ſur *AM*, ces lignes droites *KE* & *GF* repréſenteront celles qui touchent les deux lignes qui forment la génératrice & la baſe par leur évolution, & qui paſſent par le point commun touchant de la baſe & de la génératrice; ce qui eſt facile à connoître par ce que j'ai expliqué ci-devant.

Si l'on veut donc maintenant trouver les diametres des cercles qui ſeront le lieu des recourbemens des roulettes lorſque le point décrivant y ſera placé, il faut faire par la regle comme *CO* à *CA*, ainſi *AO* à *AV*; & comme *KE* à *KB*, ainſi *BE* à *BI*; & de même comme *GF* à *GD*, ainſi *DF* à *DH*, & les lignes *AV*, *BI*, *DH*

* FIG. VIII.

DH ſeront les diametres des cercles *VA*, *BI*, *DH* qui ſont le lieu qu'on cherche. Mais auſſi il eſt facile à voir que tous les diametres de ces cercles ſeront toûjours plus petits que *OA*, puiſque le ſecond terme de la proportion eſt toûjours plus petit que le premier lorſque la baſe a ſa convexité tournée vers celle de la parabole, & par conſéquent le troiſiéme terme qui eſt toûjours égal à *AO* dans cet exemple ſera plus grand que le quatriéme.

On déterminera donc par le moien de ces cercles l'eſpace où le point décrivant *P* doit être ſur le plan de la parabole pour faire que la roulette ait un recourbement. Cet eſpace ſera renfermé entre la parabole & la Courbe qui touchera tous les cercles *AV*, *BI*, *DH*, qui ſeront décrits d'un côté & d'autre de l'axe de la parabole. Il eſt donc évident que ſi le point décrivant *P* eſt dans cet eſpace, il rencontrera un de ces cercles dont l'extrémité du diametre ſur la parabole en déterminera le point où elle doit être placée ſur la baſe pour faire que ce point décrivant ſoit ſur le recourbement. Mais ſi le point décrivant eſt hors cet eſpace, la roulette n'aura point de recourbement, ce qui ſuit des démonſtrations précedentes.

Mais ſi le point décrivant *P* eſt donné de poſition avec un point comme *B* ſur la parabole, & qu'on demande le diametre de la baſe circulaire pour faire enſorte que lorſque le point *B* la touchera, le point *P* ſoit dans le recourbement de la roulette; il n'y aura qu'à ſe ſervir de la converſe de la propoſition générale, & mener la ligne droite *PB*, & par le point *P* la ligne *PQ* perpendiculaire à *BP*, laquelle rencontrera au point *Q* la ligne *BK* perpendicu-

culaire à la parabole en B, enſorte que ſi l'on fait enſuite comme KQ à KB, ainſi KB à une quatriéme KR, le point R ſera le centre du cercle de la baſe, lequel aura pour rayon RB. La grandeur KR peut être priſe indifferemment d'un côté & d'autre de K ſur KB, pour y déterminer le centre R du cercle de la baſe qui aura ſon rayon KB; & il eſt évident qu'il y aura pluſieurs cas particuliers qui naîtront des differentes grandeurs données. Et ſi le point Q tomboit au point K, le cercle de la baſe auroit ſon centre à diſtance infinie, & ce ne ſeroit qu'une ligne droite.

La démonſtration de la conſtruction de ce problême ſe tire de la regle que j'ai donnée: car ſi le point R eſt le centre de la baſe, on aura par la regle KR à KB, comme BR à BQ; mais en diviſant KR ſera à BR moins KR, ce qui eſt égal à KB, comme KB à BQ moins KB, ce qui eſt égal à KQ; ce qui eſt la même proportion que je viens de donner pour trouver le point R.

Ces démonſtrations conviennent auſſi à toutes les lignes qui ſont décrites par l'évolution d'une autre, ſelon la methode de M. *Huygens* dans ſon *Traité des Pendules*, puiſque toutes ces ſortes de lignes ne ſont que des roulettes qui ont pour baſe la ligne courbe qu'il appelle évoluë, & pour génératrice le cercle infini ou la ligne droite, ce qui eſt la même choſe.

Pour les points de reflexion des roulettes, ils ſeront déterminez par la plus petite ou la plus grande ligne menée du point décrivant ſur la génératrice, lorſque le point de rencontre de cette ligne avec ſa génératrice ſera ſur la baſe; alors le point décrivant ſera dans le point de re-

flexion de la roulette: ce qui paroît par la ſeule inſpection de la figure, & par la formation de la roulette.

Détermination de la ſuperficie & de la longueur des Roulettes.

On peut par la methode que j'ai donnée cidevant déterminer la ſuperficie des roulettes, & la longueur de leurs Courbes. Car ſi les lignes menées du point décrivant juſqu'aux points de la Courbe génératrice, gardent entr'elles quelque progreſſion connue, les diviſions de la génératrice auſquelles ces lignes ſont menées en aiant auſſi une; & de plus les angles que font les touchantes des lignes qui décrivent par leur évolution la génératrice & la baſe, étant auſſi connus par rapport aux parties de ces lignes, on connoîtra la ſuperficie & la longueur des roulettes par rapport à quelque ſuperficie & à quelque ligne de celles qui ſont données dans la génératrice & dans la baſe.

On verra dans les exemples ſuivans des applications de cette methode, qui ſerviront pour toutes les roulettes.

Exemple I.

Soit le * cercle *ABD* dont le centre eſt *C* pour la Courbe génératrice de la roulette *DPV*; & le cercle *AEV* dont le centre eſt *O* pour la baſe. Les centres *C* & *O* de ces cercles repréſentent les lignes dont les deux cercles ſont évolus: c'eſt-pourquoi dans toutes les poſitions de ces deux cercles les lignes qui paſſeront par ces deux

* FIG. IX.

deux centres, ſeront perpendiculaires à la génératrice & à la baſe.

Maintenant dans telle poſition qu'on voûdra du cercle générateur *AEPD* ſur la baſe *AAV* laquelle il touche en *A*, le point décrivant *P* étant placé ſur la roulette en *P*, ſi la génératrice a roulé ſur la baſe d'une partie indéfiniment petite *AE*, la ligne *CO* qui joint les centres ou qui touche les Courbes qui décrivent par leur évolution la génératrice & la baſe, aura paſſé en *OEQ*, & le point décrivant *P* ſera parvenu au point *S*.

Aiant mené comme on a fait pour les touchantes les lignes *AP*, *EP*, *ES*, il s'enſuit que la ligne *EP* ſera parvenue en *ES*, & que l'angle *PES* ſera égal à l'angle *CEQ*. Ainſi dans ce petit roulement il ſe ſera formé la figure *PAES*, qui ſera la portion de la ſuperficie de la roulette qui convient à ce roulement *AE*.

Mais cette ſuperficie eſt compoſée de deux triangles *APE*, *PES*, & le triangle *APE* a ſon angle en *P* égal à la moitié de l'angle *ACE* ou à l'angle *ADE* à cauſe du cercle. C'eſt-pourquoi ſi l'on diviſe en deux également l'angle *ACE* par la ligne *CR* laquelle ſera parallele à *DE*, on aura le triangle *RCE* qui aura ſon angle *RCE* égal à l'angle *APE* à cauſe du cercle, & ſon angle exterieur *CEQ* égal à l'angle *PES*. Mais comme dans les triangles qui ont leurs angles indéfiniment petits ou grands, on raiſonne des côtez comme des angles; il s'enſuit que *ER* | *CR* || l'angle *RCE* ou *APE* | l'angle *CER* ou *CEQ* ou *PES*.

Mais auſſi les deux triangles qui ont un angle indéfiniment petit *PAE*, *PES*, & qui ont le

côté commun *PE* & les autres ſenſiblement égaux, ſont entr'eux comme leurs angles *APE*, *PES*; on aura donc le triangle *APE* | triangle *PES* || *ER* | *CR*.

Mais dans le triangle *OCE* dont les angles en *C* & en *O* ſont indéfiniment petits, & dont l'angle *C* eſt diviſé en deux également par la ligne *CR*, & *CD* étant égale à *CA* ou *CE*, on a *OD* | *OC* || *DE* ou *DA* ou 2*CA* | *CR*. Semblablement on a *OD* | *DC* || *OE* ou *OA* | *ER*.

C'eſt-pourquoi *OD* × *CR* ſera égal à *OC* × 2*CA*.

Et de même *OD* × *ER* ſera égal à *DC* ou *CA* × *OA*.

Et comparant les quantitez égales de l'un à l'autre, & à cauſe des côtez *OD* égaux, on a *CR* | *ER* || *OC* × 2*CA* | *CA*×*OA*, ou bien || *OC* × 2*CA* | 2*CA* × ½*OA*

Donc auſſi à cauſe du côté égal 2*CA*, on a *CR* | *ER* || *OC* | ½*OA*, ou bien *invertendo* *ER* | *CR* || ½*OA* | *OC*; ou doublant || *OA* | 2*OC* égal 2*OA* plus 2*CA*.

Donc enfin *OA* | 2*OA* plus 2*CA* || triangle *APE* | triangle *PES*.

Mais compoſant *OA* | *OA* plus 2*OA*, ou bien 3*OA* plus 2*CA* || le triangle *APB* | triangle *APE* plus le triangle *PES* qui ſont enſemble égaux à la figure *PAES*.

Mais comme on aura toûjours la même analogie pour tous les points de la Courbe génératrice, & que tous les triangles *APE* enſemble compoſent le demi-cercle *DBA*, & toutes les figures *PAES* auſſi priſes enſemble compoſent toute la ſuperficie de la roulette, on aura le demi-cercle générateur *DBA* | la demi-roulette

ADPV || *OA* rayon du cercle baſe | 3*OA* plus 2*CA*, ce qui eſt trois fois le rayon du cercle baſe plus deux fois le rayon du cercle générateur.

Lorſque les convexitez du cercle générateur & du cercle baſe ſont tournées du même côté, la même analogie ſubſiſte, mais non-pas avec addition, mais par ſouſtraction, ce qui vient de la ſuite des comparaiſons.

On aura auſſi par ce même moien le rapport des ſecteurs du cercle générateur aux portions de la ſuperficie de la roulette, leſquelles ſeront faites par une ligne comme *AP* perpendiculaire à la Courbe de la roulette en *P*. Car nous avons vû dans les touchantes, que ſi l'on mene une ligne droite *AP* du point *A* où la génératrice touche la baſe juſqu'au point décrivant *P*, la ligne menée par *P* perpendiculaire à *AP* touchera la roulette en *P*; c'eſt-pourquoi la ligne *AP* eſt perpendiculaire à la Courbe de la roulette. Mais il s'enſuit auſſi par la demonſtration que je viens de donner, que le ſegment du cercle générateur *PEA* ſera au ſegment ou portion de la roulette *PSVEA* || *OA* | 3*OA* plus 2*CA*.

Il s'enſuit delà qu'une de ces roulettes étant donnée, on la peut diviſer avec une ligne droite perpendiculaire à ſa Courbe comme *AP* dans quelle raiſon on voudra, en diviſant le cercle générateur *DPA* dans la même raiſon donnée par une corde comme *AP*, ce qui eſt facile en ſuppoſant cette diviſion du cercle.

Pour la longueur de la Courbe de la roulette, on la détermine en cette maniere. Si les portions indéfiniment petites comme *AE* du cercle générateur ſont toutes égales entr'elles, auſſi

tous les angles comme *CEQ* ſeront égaux entr'eux, qui ſont auſſi égaux aux angles *PES*. Mais comme on conſidere les triangles *PES* comme iſoſceles dont les baſes *PS* ſont portions de la roulette, il eſt évident que toutes ces baſes *PS* auront entr'elles la même raiſon que les côtez *PE*. Mais les côtez *PE* ſont les cordes du demi-cercle *DBA*, & toutes ces cordes étant élevées perpendiculairement ſur les parties *AE* du demi-cercle, font une ſuperficie égale au quarré du diametre *DA*, ce qui eſt connu.

Mais auſſi la premiere corde qui eſt *DA* aura même raiſon à la premiere baſe *PS*, que toutes les cordes enſemble à toutes les baſes enſemble, & la premiere baſe *PS* eſt l'arc *MN* compris entre *EC* & *EQ*. C'eſt-pourquoi le produit de *DA* par toutes les *PS* priſes enſemble, ſera égal au produit de *MN* par toutes les cordes priſes enſemble.

Mais la baſe *NM* dans ce cas de la figure, eſt égale à *ND* ou *AE* ſon égale plus *DM*. Et toutes les cordes priſes enſemble & multipliées par *AE* ou *ND*, ſont égales à la ſomme du produit de chacune en particulier par la même *AE*, ce qui eſt égal au quarré du diametre *DA*, comme nous avons dit. Donc *ND* | *NM* || le quarré de *DA* | produit de *DA* par toutes les *PS* priſes enſemble; & à cauſe de la hauteur commune *DA*, on a *ND* | *NM* || *DA* | à toutes les *PS* priſes enſemble.

Et par ce qu'on a démontré pour la ſuperficie dans cet exemple, *ND* ou *AE* | *NM* || *ER* | *CR*, & auſſi *ER* | *CR* || *0A* | 2*0A* plus 2*AC*; donc enfin *0A* | 2*0A* plus 2*AC* || *DA* diametre du cercle générateur | à la circonfe-

ren-

rence de la roulette *DPV*; ou bien ce qui eſt la même choſe, en doublant les antecedens de cette analogie, & prenant enſuite la moitié de la premiere raiſon, on aura *OA* | *OA* plus *AC* || 2*DA* | *DPV*.

Pour ce qui eſt des portions de cette roulette comme *PV*, il s'enſuit de ce qui a été démontré, que ſi l'on fait *OA* | *OA* plus *AC* || 2*EP* qui eſt la corde de l'arc répondant à la portion de la roulette | à la portion *PV* de la roulette.

Si les convexitez de la génératrice & de la baſe étoient tournées du même côté, on trouveroit pour le ſecond terme de l'analogie, *OA* moins *AC*, au lieu de *OA* plus *AC*, & le reſte ſeroit de même.

Si dans cette roulette la baſe étoit une ligne droite, la compoſition tant de la ſuperficie que de la circonference ſe déprimeroit; ce qui eſt facile à voir.

Exemple II.

On peut encore déterminer d'une autre façon la ſuperficie & la longueur de cette eſpece de roulette, & en même temps celles des roulettes allongées ou raccourcies, leſquelles ſont formées par des points qui ſont au dedans ou au dehors du cercle générateur qui roule ſur un autre cercle.

Lemme I.

Soient le * demi-cercle *BDV*, dont le diametre eſt *BV*, & le centre *C*; ſoit *CD* un ra-

* FIG. X.

yon perpendiculaire à BV, & quelque ligne droite $P\pi$ parallele à BV, qui rencontre le cercle en P & π. Si ſur le diametre prolongé ou non prolongé on prend quelque point A, & que de ce point on mene les lignes AD, AP, $A\pi$; je dis que le quarré de AP joint au quarré de $A\pi$ ſera égal à deux fois le quarré de AD.

Des points P & π ſoient menées les perpendiculaires PO, $\pi\omega$ au diametre BV. On aura par la conſtruction CO égale à $C\omega$, & PO égale à $\pi\omega$. Mais à cauſe des triangles rectangles, APO, ADC, $A\pi\omega$, le quarré de AP eſt égal au quarré de PO plus le quarré de AO, lequel eſt égal au quarré de AC plus le quarré de CO plus deux rectangles CA par CO. Mais auſſi le quarré de $A\pi$ eſt égal au quarré de $\pi\omega$ plus le quarré de AC plus le quarré de $C\omega$ moins deux rectangles CA par $C\omega$; & aſſemblant ces deux valeurs, on aura le tout réduit à deux quarrez de PO plus deux quarrez de CO plus deux quarrez de AC. Mais le quarré de PO plus le quarré de CO, eſt égal au quarré de CP ou de CD; donc les deux quarrez de AP & de $A\pi$ ſeront enſemble égaux à deux quarrez de AC plus deux quarrez de CD, leſquels ſont enſemble égaux à deux quarrez de AD. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Ce ſera la même démonſtration ſi l'on prend le point A ſur le cercle en V, ou ſur le diametre BV au dedans du cercle.

Lemme II.

* Les mêmes choſes étant poſées comme dans le Lemme précedent, ſi par le point A on

* FIG. XI.

on mene AE perpendiculaire à VB & ſoit AE de quelle grandeur on voudra, laquelle ſoit la baſe de trois triangles AEP, $AE\pi$ & AED; je dis que les deux triangles enſemble AEP, $AE\pi$ ſont doubles du triangle AED.

Aiant mené les lignes EO, $E\omega$, EC, on formera trois autres triangles AEO, $AE\omega$, AEC, qui ſeront égaux aux précedens, puiſqu'ils ont la même baſe AE & les mêmes hauteurs. Mais ces trois triangles qui ont la même baſe, ſont entr'eux comme leurs hauteurs $A\omega$, AC, AO, qui ſont des grandeurs en proportion arithmetique par la conſtruction; c'eſt-pourquoi la ſomme des extrêmes eſt double de celle du milieu, ce qui ſera auſſi des triangles qui ſont en même proportion. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Si le point A étoit pris ſur le diametre VB au dedans du cercle; alors ſi CA eſt plus grande que CO ou $C\omega$, le cas eſt le même que le précedent: mais ſi le point O ou ω tombe en A, alors AO eſt double de AC, & la propoſition eſt évidente: Et enfin ſi CA eſt plus petite que CO, alors on aura la difference entre AO & $A\omega$ qui ſera double de AC, & ce ſera la même choſe pour les triangles.

Conſtruction & démonſtration de la Propoſition.

* Soit le cercle AVN dont le centre eſt O pour la baſe de la roulette, & le cercle générateur DBA dont le centre eſt C, & le point décrivant F placé où l'on voudra.

Il eſt évident que dans le roulement du cercle générateur DBA ſur la baſe, le point décrivant tracera un cercle $FIIG$ concentrique au

* Fig. XII.

générateur, & par rapport à ce cercle *DBA* & ſur ſon plan, dans toutes ſes poſitions differentes ſur la baſe; mais le point décrivant tracera la roulette *FM* par rapport à la baſe & ſur ſon plan.

Soit le point décrivant *F* en quelque poſition comme en *I*. Si par le point *I* on mene *IK* parallele au diametre *DA* du cercle générateur qui paſſe par le centre *O* de la baſe, quand le point décrivant eſt en *I*, & qu'on mene auſſi les lignes *Ii*, *Kk* & *CB* perpendiculaires au diametre; & qu'on ſuppoſe que le cercle générarateur ſe ſoit avancé ſur la baſe en roulant, d'une partie *AE* indéfiniment petite; aiant tiré les lignes *AI*, *AH*, *AK*; *EI*, *EH*, *EK*; & *Ei*, *EC*, *Ek*, on aura par le Lemme 2. les deux triangles enſemble *AEI*, *AEK*, qui ſont égaux aux deux triangles *AEi*, *AEk*, à cauſe des hauteurs égales, égaux au double du triangle *AEH*, égal au triangle *AEC*, & qui eſt auſſi égal au triangle *AEB*; donc tous les triangles enſemble *AEI*, *AEK* dans la roulette *FMNA* ſeront auſſi égaux au double de tous les triangles *AEB* ou *AEC*, puiſqu'ils auront tous les mêmes petits arcs *AE* du cercle *ABD* pour baſe: mais la baſe *AVN* étant égale au demi-cercle *AB*, tous les triangles comme *AEI*, dont *AEK* en ſera auſſi un, ſeront enſemble égaux à tous les triangles *AEB* ou *AEC*, qui auront les mêmes baſes *AE* qui compoſent le demi-cercle *ABD*; donc enfin tous les triangles comme *AEI*, ſeront égaux à la ſurface du demi-cercle *ABD*, à laquelle tous les triangles *AEB* ou *AEC* ſont égaux; ce qui eſt évident.

Ce ſera la même choſe ſi le point décrivant eſt ſur la circonference du cercle générateur *ABD*.

Mais

Mais outre les triangles *AEI* dans la ſuperficie de la roulette, il y en a encore d'autres comme *EIR* ou *AIR* pour la remplir entierement, ſuivant ce que nous avons dit d'abord dans la génération ; & tous ces triangles ſont ſemblables, car ils doivent tous avoir un même angle en *E* ou en *A*, & leurs côtez ſeront *EI*, *EH*, *EK*, ou bien *AI*, *AH*, *AK*; car on regarde ces lignes comme égales entr'elles, les points *A* & *E* étant pris pour un même point. C'eſt pourquoi tous ces triangles ſemblables ſeront entr'eux comme les quarrez de leurs côtez *AI*, *AH*, *AK*. Mais par le Lemme 1. le quarré de *AI* & le quarré de *AK* ſeront enſemble égaux au double du quarré de *AH* ; c'eſt-pourquoi les deux triangles ſemblables *AIR*, *AKX* ſeront enſemble égaux au double du triangle ſemblable *AHY*.

Il ne reſte donc plus qu'à connoître la ſomme de tous les triangles *AHY* ou *EHY*.

J'ai déja expliqué que tous les angles du ſommet, comme *HEY* de ces triangles ſemblables, doivent être égaux à l'angle *CEQ* qui eſt l'exterieur du triangle *CEO*, & qui eſt égal aux deux interieurs *OCE*, *COE*.

Je dis maintenant que ſi par le point *O* on mene la ligne *Ob* parallele à *AH* ou *EH* qu'on regarde comme la même, & qu'au point *b* on éleve ſur *Ob* la perpendiculaire *bq* laquelle rencontre en *q* la ligne *OC*; & qu'on faſſe comme *OA* à *OA* plus *Oq*, ainſi la ſuperficie du demi-cercle générateur *DBA*, à une autre ſuperficie, cette ſuperficie ſera égale à celle de la demi-roulette *FMNVA*, ſoit interieure, ſoit exterieure, ſoit moienne ; ce que je démontre comme il ſuit.

Toute la ſuperficie de la demi-roulette eſt compoſée de quadrilateres comme *AERI* formez ſur tous les arcs *AE* du demi-cercle générateur *ABD*, leſquels par ce que nous venons de rapporter ſont égaux à autant de triangles *AEH* ou *AEC* qu'il y a d'arcs *AE* dans le cercle, & qui tout enſemble ſont égaux au demi-cercle *ABD*; plus à autant de triangles *EHϒ* ou *AHϒ* qu'il y a auſſi d'arcs *AE* dans le demi-cercle *ABD*.

Mais le triangle *AEC* eſt au triangle *AHϒ* dans la raiſon compoſée de la baſe *AE* à la baſe *Hϒ*, & de la hauteur *CA* à la hauteur *AH*, car on conſidere ces triangles comme rectangles.

Mais *AE* eſt à *Hϒ* dans la raiſon compoſée de la raiſon de *AE* à *CQ* qui eſt la partie de la ligne *CB* coupée par *OE* prolongée, & *AE* eſt à *CQ*, comme *OA* à *OC*, & de la raiſon de *CQ* à *Hϒ* qui eſt auſſi celle de *EC* à *EH*, ou de *AC* à *AH*.

Donc la raiſon du triangle *AEC* au triangle *AHϒ* ſera celle du produit de *AO* par *AC* par *CA*, au produit de *OC* par *AH* par *AH*, qui eſt celle du quarré de *CA* par *AO*, au quarré de *AH* par *OC*.

Mais par la conſtruction le quarré de *CA* eſt au quarré de *AH*; ou bien, ce qui eſt la même choſe, le quarré de *CO* eſt au quarré de *Ob*, comme *CO* à *Oq*: Donc la raiſon du triangle *AEC* au triangle *AHϒ* ſera celle de *CO* par *AO* à *Oq* par *OC*; & à cauſe du côté commun *CO*, ce ſera celle de *AO* à *Oq*.

Donc enfin le triangle *AEC* eſt au triangle *AHϒ*, comme *AO* à *Oq*. Et compoſant le triangle *AEC* eſt au triangle *AEC* plus le triangle *AHϒ*, ce qui forme la figure ou quadrilatere *AEϒH*,

AEYH, comme *AO* à *AO* plus *Oq*; & le triangle *AEC* eſt au quadrilatere *AEYH*, comme tous les triangles *AEC* égaux entr'eux, qui forment le demi-cercle *ABD*; à tous les quadrilateres *AEYH* égaux entr'eux, qui forment la roulette *FMNVA*. Donc *AO* ſera à *AO* plus *Oq*, comme le demi-cercle *ABD* à la demi-roulette *FMNVA*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Cette démonſtration & conſtruction convient à toutes ces ſortes de roulettes, ſoit que le point décrivant ſoit au dedans ou au dehors du cercle générateur, ou ſur ſa circonference. Mais dans ce dernier cas il eſt évident qu'au lieu de *AH* on aura *AB*, ce qui donnera le triangle iſoſcele *ACB*, & par conſéquent auſſi le triangle iſoſcele *Ahq*, d'où l'on voit que *CO* & *Cq* ſeront égales entr'elles; & par conſéquent la raiſon de *OA* à *OA* plus *Oq*, ſe réduira à celle de *OA* à trois *OA* plus deux *CA*, qui eſt celle qu'on a trouvée par l'autre methode dans l'exemple précedent.

On trouvera auſſi les parties de ces roulettes par les mêmes conſtructions. Et enfin ce ſera la même choſe pour toutes les roulettes tant allongées que raccourcies dont la baſe ſera une ligne droite, qui n'eſt qu'un cercle dont le centre eſt à diſtance infinie; car alors les *Oh* & les *hq* qui ſont paralleles aux *AH* & *Hp*, donneront des parties *AO*, *pq* auſſi infinies; & les *AC* & *Cp* n'entrent point en comparaiſon avec elles, quoique dans leur étendue infinie elles ne laiſſent pas de conſerver toûjours la même raiſon des *AC* à *Cp*. C'eſt-pourquoi on aura alors le cercle générateur à la ſuperficie de la roulette, comme *AO* infinie à *AO* infinie plus *Oq* infinie. Mais cette *Oq* infinie eſt compoſée

de *AO* infinie & de *Aq* infinie, qu'on ne conſidere que comme *pq* infinie; & *AO* infinie étant à *pq* comme *AC* à *Cp*, le rapport du cercle générateur à ces ſortes de roulettes, ſera comme *AC* à *AC* plus *Ap*, ou comme *AC* à 2*AC* plus *Cp*.

Dans la premiere de ces roulettes où le point décrivant eſt ſur le cercle générateur, & où alors *Cp* devient égale à *CA*, il s'enſuit que la ſurface de la roulette ſera triple du cercle générateur, puiſque *AC* plus *Ap* ſera égal à trois *AC*.

Mais en général pour toutes ces roulettes qui ont la baſe en ligne droite, ſi l'on tire par le point *A* la ligne *Af* perpendiculaire à *CO*, & qu'on la prenne égale à *AH*, la ligne *Cf* ſera le rayon d'un demi-cercle égal à la demi-roulette. Car par les démonſtrations précedentes *CA* eſt à *CA* plus *Cp*, comme le demi-cercle générateur à la demi-roulette, & comme le quarré de *CA* au quarré de *CA* plus le quarré de *AH*, ce qui eſt égal au quarré de *Cf*.

Pour les longueurs de ces roulettes on voit dans la figure précedente qu'elles ſont toutes compoſées de toutes les baſes *IR* des triangles ſemblables *EIR* ou *AIR*, & ces baſes ſont entr'elles comme les côtez *IA*: c'eſt-pourquoi comme *IA* ſera à *IR* dans un des triangles, ainſi toutes les *IA*, à toutes les *IR* qui ſeront la longueur de la roulette.

Si l'on prend * la premiere ou la plus grande *IA* qui eſt *FA*, & la premiere ou la plus grande *IR* qui eſt *FZ* qu'on détermine dans cette figure, qui eſt la même que la précedente, & qu'on a ſeulement ſeparée pour éviter la confuſion

* FIG. XIII.

ſion des lignes, en faiſant comme *AC* à *AF*, ainſi *CQ* à *FZ*, ou bien en menant la ligne *AQ* qui rencontre en *Z* l'arc *FZ* décrit du centre *A* ſur le rayon *AF*, ou *FZ* perpendiculaire à *DA*, ce qui eſt la même choſe dans des arcs indéfiniment petits, comme on les ſuppoſe ici, on aura *FA* à *FZ*, comme toutes les *IA* à toutes les *IR* qui ſont enſemble égales à la longueur de la roulette. Donc on a *FA* par toutes les *IR* égal à *FZ* par toutes les *IA*.

Soit mené *CE* qui coupe l'arc *GH* au point *s*, on aura l'arc *Gs* du cercle *FHG* ſemblable à l'arc *AE* du cercle *ABD*.

Mais toutes les *IA* par *Gs* ſeront à toutes les *IA* par *FZ*, comme *Gs* à *FZ* à cauſe de la hauteur commune *IA*. Si l'on détermine donc toutes les *IA* par *Gs*, & qu'on connoiſſe le rapport de *Gs* à *FZ*, on aura toutes les *IA* par *FZ* qui doivent être égales à *FA* par toutes les *IR*.

Mais on trouvera la raiſon de *Gs* à *FZ* en conſiderant qu'elle eſt compoſée de celle de *Gs* à *AE*, qui eſt celle de *CG* à *CA*; & de celle de *AE* à *CQ*, qui eſt celle de *OA* à *OC*; & enfin de celle de *CQ* à *FZ*, qui eſt celle de *CA* à *AF*; & ces trois raiſons ſont celle du produit de *CG* par *OA* par *CA* au produit de *CA* par *OC* par *AF*, laquelle ſe réduit à celle du produit de *CG* par *OA* au produit de *OC* par *AF*, à cauſe de la hauteur commune *CA*.

Et ſi l'on mene *OH* & *Ar* parallele à *OH*, on aura *OC* à *CG* ou *CH*, comme *OA* à *Hr*; c'eſt-pourquoi le produit de *CG* par *OA* ſera égal au produit de *OC* par *Hr*, & ſubſtituant ce produit de *OC* par *Hr*, à la place du produit de *CG* par *OA* dans la derniere raiſon trouvée,

vée, elle se réduira à celle du produit de OC par Hr au produit de OC par AF, laquelle se réduit encore à celle de Hr à AF, à cause de la hauteur commune OC, laquelle sera celle de Gs à FZ.

Il ne faut plus maintenant que trouver le produit de toutes les IA par Gs, & l'on en tirera par la raison de Hr AF le produit de toutes les IA par FZ, qui doit être égal au produit de FA par toutes les IR, & par conséquent ce produit étant divisé par FA, donnera toutes les IR égales à la longueur de la roulette.

* Le demi-cercle FHG étant donné avec son diametre FG prolongé d'un côté & d'autre, & le point A aussi donné sur ce diametre; si l'on mene le rayon CH perpendiculaire à FG; & menant aussi AH avec sa perpendiculaire HP qui rencontre le diametre en P, on aura le rectangle de AC par AP égal au quarré de AH.

Maintenant si l'on fait CV égale à un demi AP, & qu'on prenne VK égale à AC, & qu'enfin du point K pour centre & pour rayon KV on décrive le demi-cercle VNM, une ligne telle qu'on voudra ON perpendiculaire à FA, laquelle coupe les deux cercles en P & en N, fera AI égale à VN.

Car le quarré de AH est égal au rectangle de AC par AP par la construction, ou bien égal au rectangle de $2AC$ par $\frac{1}{2}AP$, & $\frac{1}{2}AP$ est égal à CV, & $2AC$ égal à VM.

Le quarré de AI est égal au quarré de OI plus le quarré de AC plus le quarré de CO plus le rectangle de $2AC$ par CO; & le quarré de CI étant égal au quarré de OI plus le quarré de CO, il s'ensuit que le quarré de AI sera égal au

* FIG. XIV.

au quarré de *CI* ou *CH* plus le quarré de *AC* plus le rectangle de 2*AC* par *CO*, & enfin le quarré de *AI* ſera égal au quarré de *AH* plus le rectangle de 2*AC* par *CO*.

Mais enfin le rectangle de 2*AC* ou *VM* par *CO* plus le rectangle de 2*AC* ou *VM* par *VC* ou $\frac{1}{2}AP$, lequel eſt égal au quarré de *AH*, ſera égal au quarré de *VN* par la conſtruction; donc le quarré de *AI* ſera égal au quarré de *VN*, & *AI* égale à *VN*. On fera une ſemblable démonſtration ſi la ligne *ON* eſt au deſſous de *CH*.

On voit auſſi que ſi l'on décrit une Parabole *VX* dont *VF* ſoit l'axe, *V* le ſommet, & ſon parametre égal à *VM* ou 2*AC*, elle aura toutes ſes ordonnées *OX* qui couperont les cercles *FHG*, *MNV* aux points *I* & *N*, égales à *AI* & à *VN*.

Ainſi les ordonnées *OX* de la Parabole *VX* étant élevées perpendiculairement ſur les points *I*, formeront une figure ſur le cylindre droit qui a pour baſe le cercle *FHG*, laquelle ſera égale à toutes les *IA* par *Gs*, ou égales enſemble à chaque *IA* par chaque *Gs*, ou égales enſemble à chaque *IA* par chaque *Gs* qu'on ſuppoſe égales entr'elles.

Il paroît enfin que ſi l'on éleve le plan de la Parabole *VX* perpendiculairement ſur ſon axe *VM*, & qu'on imagine un cylindre droit qui ait pour baſe cette Parabole, ſa ſuperficie coupera de la ſuperficie du cylindre droit qui a pour baſe le cercle *FHG*, la même figure que nous venons de déterminer. *Ce qu'il falloit faire.*

On peut auſſi faire la même operation d'une maniere un peu plus abregée, en ſe ſervant du calcul des lieux; c'eſt-pourquoi je l'emploierai dans

dans la methode ſuivante pour trouver d'une maniere differente de la précedente, la même valeur de toutes les IA par Gs.

Soit le * cercle FIG dont le centre eſt C, & ſur ſon diametre FG prolongé ſoit le point A, d'où ſoient menées les lignes AI à la circonference du cercle. Du point G pour centre & pour rayon GF ſoit décrit le quart de cercle FTS, lequel aura ſon rayon double de celui du cercle FHG. Soit auſſi dans le cercle FIG quelque corde GI prolongée en T juſqu'au cercle FTS. Du point T ſoit mené TQ perpendiculaire à GS. On ſait que TQ doit être égale à GI.

Maintenant ſoit fait $CG=r$. $GQ=y$. $CA=a$. donc $FG=2r$.

Si l'on mene AI on trouvera ſa valeur; car GI eſt la même que $TQ=\sqrt{4rr-yy}$.

Mais $4rr=$ au quarré de $GT\,|\,yy\,||\,4rr-yy\,|\,\frac{4rryy-y^4}{4rr}=IO$ quarré.

Mais auſſi CI quarré moins IO quarré $=$ CO quarré, ce qui eſt $rr-\frac{4rryy+y^4}{4rr}$, ou bien $\frac{4r^4-4rryy+y^4}{4rr}=CO$ quarré, & par conſéquent $\frac{2rr-yy}{2r}=CO$.

Donc enfin $a+\frac{2rr-yy}{2r}$, ou bien $\frac{2ar+2rr-yy}{2r}$ $=AO$, & par conſéquent AI quarré $=$ AO quarré plus IO quarré, ce qui eſt $\frac{4a^2rr+4r^4+8ar^3-4aryy-4rryy+4rryy-y^4}{4rr}$, ce qui

* FIG. XV.

qui se réduit à $\frac{raa + r^3 + 2rra - ayy}{r}$, ou bien à $aa + rr + 2ra - \frac{ayy}{r}$. Mais pour abreger soit $aa + rr + 2ra = dd = AF$ quarré; donc $dd - \frac{ayy}{r} = AI$ quarré, & faisant cette valeur $= zz = QX$ quarré, on aura $dd - \frac{ayy}{r} = zz$, ou bien $dd - zz = \frac{ayy}{r}$, ou enfin $dd - zz = \frac{rayy}{rr}$, qui est un lieu à l'Ellipse, laquelle passera par tous les points X, & qui sera très-facile à construire.

Car si l'on prolonge GF jusqu'en M, & qu'on prenne $CM = CA$, & que sur GM comme diametre on décrive le demi-cercle GhM qui rencontre CH prolongée en h, on aura Ch quarré = au rectangle CG par $CM = ra$.

C'est-pourquoi aiant mené Mh prolongée jusqu'à GS en V, on aura GM & GV pour les deux demi-axes de l'Ellipse MXV; & toutes les ordonnées comme XQ au petit axe de cette Ellipse seront égales aux IA, & les arcs FT seront égaux aux arcs FI.

Il s'ensuit donc que si l'on éleve toutes les ordonnées XQ sur les points T, on aura la même figure que si on élevoit les $IA = XQ$ sur les points T, & cette figure sera une portion de cylindre droit dont la base est le cercle FTS.

Cette figure déterminée se réduira comme la précedente pour en tirer la valeur de la longueur de la roulette cherchée.

On voit aussi que si l'on éleve l'Ellipse MXV perpendiculairement sur son axe GV, & qu'on imagine un cylindre droit qui ait pour base cette El-

Ellipſe, la rencontre de ſa ſuperficie avec celle du cylindre droit, dont la baſe eſt le cercle *FTS*, retranchera de ce dernier une figure égale à celle des *XT* élevées ſur les points *T*.

Si la baſe de ces ſortes de roulettes étoit une ligne droite, on trouvera par la même methode la valeur de la ſuperficie cherchée, qu'on pourra égaler à d'autres figures.

Exemple III.

Autre eſpece de roulette.

Si la génératrice de la roulette eſt une ligne droite, & que le point décrivant ſoit un des points de cette ligne, & que la baſe ſoit un cercle, on pourra connoître la ſuperficie & la longueur de cette roulette, puiſqu'on connoît tout ce qui eſt neceſſaire pour ce ſujet tant dans la génératrice que dans la baſe. Car puiſque la ligne qui décrit la ligne droite par ſon évolution eſt un point à diſtance infinie, & que celle qui décrit le cercle eſt un point à diſtance finie, on connoîtra comme on a fait ci-devant la grandeur des triangles qui compoſent cette roulette.

* Soit la ligne génératrice *AM* dont le point *P* joint au point *A* ſoit celui qui décrit la roulette, & que le cercle *AB* en ſoit la baſe. Aiant pris les parties *AE*, *EI* de la génératrice égales entr'elles & indéfiniment petites; lorſque les lignes *EC*, *IC* qui touchent celle qui décrit la génératrice *AM* par ſon évolution, ſeront jointes aux lignes *DE*, *DI* de celle qui décrit la baſe par ſon évolution, le point décrivant *P* ou

* FIG. XVI.

ou *A* ſe ſera mû en *F* & en *Q*, & l'angle *PEF* ſera égal à l'angle *CEK*. De même l'angle *FIQ* ſera égal à l'angle *LIG* ; car *CI* ſera poſée en *LI* quand *PE* eſt en *FE*, *LI* ſera parallele à *KE*: mais tous ces angles *CEK*, *LIG* & les autres ſemblables étant toûjours égaux entr'eux par la conſtruction, les angles *PEF*, *FIQ* ſeront auſſi égaux entr'eux, puiſqu'ils ſont égaux à l'angle *CEK* ou aux angles égaux *ADE*, *EDI*.

Tous les triangles comme *PEF*, *FIQ* étant donc conſiderez comme iſoſcele qui ont l'angle du ſommet égal en tous ; l'eſpace de la roulette *PQNOBA* en quelque endroit qu'elle ſoit terminée par ſa ligne décrivante comme en *ON* & par ſa baſe *ABO*, ſera égal à la ſomme de tous ces triangles iſoſceles ſemblables.

Mais tous ces triangles iſoſceles ſemblables ont tous leurs côtez en proportion arithmetique; car chaque côté ſera égal aux parties de la génératrice comme *EP*, *IP*, &c. qui augmentent de parties égales entr'elles, & à *PE*, *EI*, &c. C'eſt-pourquoi cet eſpace de la roulette *PQNOBA*, dont la baſe *ABO* ſera égale à la partie *AM* de la génératrice, ſera égal à un eſpace qui ſera au tiers du ſecteur de cercle *DABOD* comme le quarré de la ligne *AM* ou de la partie *ABO* de la baſe qui lui eſt égale, eſt au quarré du rayon *DA* de la baſe.

Car les angles *ADE*, *EDI* du ſecteur ſont égaux à ceux des triangles iſoſceles qui compoſent l'eſpace de la roulette, & auſſi en même nombre: mais ſi de tous les petits ſecteurs comme *ADE*, *EDI* qui compoſent le grand ſecteur *ADOBA*, on en retranche des parties vers le ſommet *D* qui ſoient de petits triangles iſoſceles

ſceles dont les côtez ſoient en proportion arithmetique depuis le point *D* juſqu'à la ligne *DO*, il eſt évident que la ſomme de tous ces petits triangles retranchez ſera égale au tiers du ſecteur. Mais auſſi chacun de ces petits triangles iſoſceles aura une même raiſon à celui qui lui répond dans la roulette comme *PEF* à celui qui eſt retranché de *ADE*; *FIQ* à celui qui eſt retranché de *ADI*, & ainſi des autres: c'eſt-pourquoi la ſomme des triangles retranchez du ſecteur de cercle, ſera à la ſomme des triangles ſemblables ou petits ſecteurs qui compoſent la roulette, comme un ſeul de ceux du ſecteur à un ſeul de ceux de l'eſpace de la roulette, qui pourra être le dernier dans l'un & dans l'autre. Mais le dernier du ſecteur a pour côté le rayon du cercle, & celui de l'eſpace de la roulette a pour côté la ligne *AM* ou la partie *ABO* de la baſe égale à *ON*; & l'un de ces triangles étant à l'autre comme le quarré de ſon côté au quarré de celui de l'autre, il eſt évident que le tiers du ſecteur *ABOD* ſera à l'eſpace de la roulette *AQNOBA*, comme le quarré de *DA* au quarré de *ON*. *Ce qu'il falloit démontrer pour l'eſpace.*

On peut déterminer auſſi cet eſpace en décrivant un cercle qui ait pour rayon *ON*, qui eſt la partie de la génératrice qui a décrit la roulette depuis le point décrivant *P*: car ſi l'on prend le tiers d'un ſecteur de ce cercle, lequel ſoit ſemblable au ſecteur de la baſe *ADOBA*, on aura l'eſpace de la roulette *AQNOBA*; ce qui eſt évident puiſque le ſecteur de la baſe ſera au ſecteur ſemblable du cercle qui a pour rayon *ON*, comme les quarrez des rayons de ces cercles, & les tiers de ces ſecteurs étant auſſi en mê-

même raiſon, celui du cercle dont le rayon eſt *ON* ſera égal à l'eſpace qu'on cherche.

Pour la longueur de cette roulette, il eſt évident par la methode que j'ai donnée ci-devant, qu'elle doit être égale à la ſomme de toutes les baſes des petits triangles iſoſceles comme *AEF*, *FIQ*, &c. Mais toutes ces baſes aiant entr'elles même raiſon que les côtez de ces mêmes triangles qui ſont iſoſceles ſemblables entr'eux, & aux triangles ou ſecteurs égaux de la baſe *ADE*, *EDI*, ſi on en retranche de la baſe de ſemblables qui ſoient en progreſſion arithmetique depuis le premier juſqu'au dernier, comme ſont ceux de l'eſpace de la roulette, & comme je viens de dire en parlant de l'eſpace, il eſt évident que la ſomme de toutes les baſes des petits triangles du ſecteur de la baſe de la roulette, ſera à la ſomme de toutes les baſes des triangles qui compoſent la roulette, comme celle du dernier de l'un à celle du dernier de l'autre : mais ces baſes ſont entr'elles comme leurs côtez qui ſont dans le ſecteur de la baſe le rayon *DA*, & dans la roulette la ligne *ON*. Mais toutes les baſes enſemble des petits triangles dans le ſecteur *ADOBA* de la baſe, ſont égales à la moitié de la derniere priſe autant de fois qu'il y a de triangles, c'eſt à dire à la moitié de tout l'arc *ABO* du ſecteur de la baſe. Donc comme *DA* eſt à *ON*, ainſi la moitié de l'arc *ABO* ſera à la Courbe *PQN* de la roulette; ou bien, ce qui eſt la même choſe, cette Courbe de la roulette ſera égale à la moitié de l'arc du ſecteur de cercle ſemblable au ſecteur de la baſe, & décrit ſur le rayon *ON*.

Ce que je viens de démontrer de la partie de la

la roulette *PQNOBA* ſe doit entendre de même de toute autre partie ; car cette roulette eſt infinie ſi ſa génératrice eſt ſuppoſée infinie, & elle fera pluſieurs tours autour du cercle de la baſe ; & pour déterminer tant l'eſpace que la longueur de ſa ligne, ſi elle fait plus d'une révolution autour de la baſe, il faudra prendre pour ſecteur de cercle un ou pluſieurs cercles entiers avec le ſecteur qui ſe trouvera de plus dans ſa révolution, & comprendre dans ſa ſuperficie les eſpaces des révolutions inferieures autant de fois qu'il y aura de révolutions; ce qui eſt facile à voir par la génération.

On peut remarquer que cette roulette eſt auſſi la ligne qui eſt décrite par l'évolution du cercle dans le tout ou dans ſes parties, ou même dans pluſieurs révolutions. C'eſt auſſi une eſpece de Spirale; car ſi l'on aſſemble tous les ſommets *E*, *I* des triangles comme *AEF*, *FIQ* en un même point, au lieu qu'ils ſont ici diſpoſez autour de la circonference du cercle, on en fera la Spirale d'*Archimede*, ce qui eſt facile à voir, car toutes les lignes comme *FE*, *QI* ſeront en proportion arithmetique, & comprendront des angles égaux autour du point commun qui ſera le ſommet de tous les triangles.

Mais quoique l'on puiſſe conſiderer l'eſpace de la Spirale d'*Archimede* égal à celui de cette roulette, puiſqu'il eſt compoſé de triangles égaux aux précedens & indéfiniment petits, ce qui eſt égal au tiers du ſecteur de cercle, dont le rayon eſt la ligne qui termine la Spirale, il ne s'enſuit pas que ſa ligne ſoit égale à la moitié de l'arc de ce même ſecteur, qui eſt la ſomme des baſes de tous les petits triangles *AF*, *EQ*, &c. comme avoit crû un célébre Geometre, n'aiant

n'aiant pas fait assez d'attention à la methode des indivisibles. Car on ne peut pas appeller une ligne courbe continue, celle qui n'est composée que de petites lignes toutes separées & qui ne sont point touchantes, quoiqu'on les considere indéfiniment petites & indéfiniment proches les unes des autres, mais dont on ne peut pas démontrer que la difference avec la ligne proposée soit moindre qu'aucune quantité donnée. Il n'en est pas de même de la superficie de cette figure, où les petits trilignes qui la composent sont joints tous les uns aux autres, & approchent à l'infini de l'espace proposé.

*Voici de quelle maniere on peut donner une ligne droite égale à la Spirale d'*Archimede.

* Soit une portion de Spirale *CEFGO* comprise dans l'angle *ACO*, laquelle a été décrite par la ligne *CA* qui s'est mûe jusqu'en *CO* d'un mouvement égal, pendant que le point décrivant s'est mû aussi sur la ligne *CA* uniformément depuis le point *C* par l'espace *CA* égal à *CO*.

Que la ligne *CO* soit divisée en parties indéfiniment petites aux points *NQR*, &c. & l'angle *ACO* en de petits angles tous égaux entr'eux, & dont le nombre soit égal à celui des parties de la ligne *CO*, & que *PCO* en soit le dernier. Si par toutes les divisions de la ligne *CO* on lui mene des perpendiculaires comme *NG*, *QM*, *RS* qui pourront être considerées comme des arcs de cercles dont les rayons sont les lignes *CG*, *CF*, *CE* qui décroissent en proportion arithmetique par la génération de la Spirale, puisqu'elles sont menées du centre *C* jus-

* FIG. XVII.

qu'à ſa circonference aux points *GFE*, & qu'elles ſont des angles tous égaux entr'eux *OCG*, *GCF*, *FCE*, ces lignes *CG*, *CF*, *CE* ſeront auſſi égales aux lignes *CN*, *CQ*, *CR*; c'eſt-pourquoi toutes les petites diagonales *OG*, *NM*, *QS*, &c. dans les petits quadrilateres *OPGN*, *NGMQ*, *QMSR* ſeront égales aux portions de la Spirale *OG*, *GF*, *FE* compriſes dans les angles égaux. Il s'enſuit donc auſſi que la ſomme de toutes les diagonales *OG*, *NM*, *QS* dans le triangle *COP*, ſera égale à toute la ligne ſpirale *OGEC*.

Maintenant ſi ſur la même ligne *CO* on éleve les perpendiculaires *OB*, *ND*, *QH* par les points de diviſion *ONQ*, &c. & qu'on les faſſe égales chacunes à des lignes qui aient même raiſon à *CO*, que les lignes *OG*, *NM*, *QS* ont aux parties égales *ON*, *NQ*, *QR* de la ligne *CO*; ces lignes renfermeront un eſpace *CVHBO*, qui ſera au quarré de *CO* qui eſt *CT*, comme la ſomme des lignes *OG*, *GE*, *EF*, c'eſt à dire la Spirale, à la ſomme des lignes égales *ON*, *NQ*, *QR*, c'eſt à dire la ligne droite *CO*, ce qui eſt évident, puiſque chacune de ces lignes tant dans l'eſpace *CVBO* que dans le quarré *CT*, ſont multipliées par les parties égales *ON*, *NQ*, *QR*.

Je dis maintenant que l'eſpace *CVBO* eſt un eſpace hyperbolique dont *CV* eſt le demi-axe déterminé, & *C* le centre. *Ce que je démontre ainſi.*

Puiſque les parties *ON*, *NQ*, *QR* ſont des parties égales indéfiniment petites, auſſi les parties de la Spirale *OG*, *GF*, *FE* ou *OG*, *NM*, *QS* ſeront indéfiniment petites, & elles peuvent être ſuppoſées, ou touchantes, ou cordes de

la

la Spirale. Soit OI perpendiculaire à CO & égale à l'arc de cercle OA qui a pour rayon CO, & qui eſt compris dans l'angle ACO.

Soit $CO=r$. $OI=s$, & les parties de CO comme $CQ=y$.

Aiant fait CX perpendiculaire à CO, & prolongé quelqu'une des diagonales comme QS en X ſur CX, il y aura même raiſon de QR à RS, que de QC à CX.

Si l'on prolonge QM perpendiculaire à CO ou parallele à OI juſqu'à la rencontre de CI au point K; il eſt évident que la ligne QK ſera égale à l'arc de cercle renfermé dans l'angle ACO ſur le rayon CQ. Mais lorſque le point décrivant eſt en Q ſur CO, ou en F ſur la Spirale, s'il vient de F vers E ou de Q en S, il n'a plus que l'angle ACF à décrire, qui a même raiſon à tout l'angle ACO que CQ a à CO; car la ligne CO ſe meut également autour du point C, pendant que le point décrivant deſcend également de O vers C. La raiſon de QR à RS ou de QC à CX, doit donc être compoſée de celle de CQ à QK, & de celle de CO à CQ, qui eſt celle de CO à QK; mais QK eſt $\frac{sy}{r}$; donc QR à RS comme r | $\frac{sy}{r}$. Mais ſi l'on mene $O\Upsilon$ parallele à QSX, on trouvera $C\Upsilon=\frac{sy}{r}$; car on aura r | $\frac{sy}{r}$ || r | $\frac{sy}{r}$.

Mais puiſque $O\Upsilon$ doit être égale à QH, & que l'on connoît ſeulement $O\Upsilon$ par ſon quarré qui eſt $=rr+\frac{ssyy}{rr}$, ſi l'on veut faire un lieu

de tous les points trouvez comme H, ſuppoſant $CQ=y$ comme on a fait, il faut poſer $QH=x$, ce qui donnera l'équation du lieu $rr+\frac{ssyy}{rr}=xx$ ou $\frac{ssyy}{rr}=xx-rr$ à l'hyperbole. Ainſi l'on ſait que la ligne $VHDB$ eſt une hyperbole dont le demi-axe $CV=r$ qui eſt auſſi $=CO$.

Mais par la nature de cette équation à l'hyperbole, il eſt évident que ſi du point O on mene la ligne OL perpendiculaire ſur CI juſqu'à la ligne CX en L, & que du ſommet V de l'hyperbole on mene VZ parallele à CO & égale à CL, la ligne CZ ſera l'aſymptote de l'hyperbole VHB. Enfin ſi l'on fait que comme le quarré de CO qui eſt CT à l'eſpace hyperbolique $CVBO$, ainſi CO à une ligne droite, cette ligne droite ſera égale à la longueur de la Spirale depuis le point O juſqu'au centre ou à l'œuil C de la Spirale. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Exemple IV.

Voici encore un exemple de ces ſortes de lignes.

* Soit la premiere roulette ABI qui a pour baſe la ligne droite AE, & pour cercle générateur EFI, & dont l'axe eſt EI. Si l'on forme une roulette AMN qui ait pour baſe la roulette ABI, & pour ligne génératrice une ligne droite, & que le commencement du roulement ſe faſſe en A, on déterminera la ſuperficie $ADINMA$, & la grandeur de ſa ligne AMN en cette ſorte.

Si l'on prend ſur le cercle générateur de la roulette qui en eſt la baſe, des points comme EGH

* FIG. XVIII.

FGH qui ſoient indéfiniment proches les uns des autres & à égale diſtance, & que par ces points on mene des paralleles *FB*, *GC*, *HD*, &c. à la baſe *AE* juſqu'à la rencontre de la roulette en *BCD*, & que la ligne génératrice ſe trouve dans les poſitions *BK*, *CL*, *DM* quand elle touche la baſe en *BCD*; à cauſe que les points *BCD* ſont indéfiniment proches les uns des autres, on les peut regarder comme les ſommets des triangles *KCL*, *LDM*, quoique ces ſommets ſoient veritablement entre les points *BC* & *CD*. Mais ces triangles auront leurs angles du ſommet *KCL*, *LDM* égaux entr'eux; car les lignes qui paſſent par les points *BCD*, & qui touchent les deux lignes qui décrivent par leur évolution la baſe & la génératrice, feront des angles égaux entr'eux, ce qui eſt évident, puiſque la baſe étant une ligne droite, la ligne qui la décrit par ſon évolution eſt un point à diſtance infinie, & celle qui décrit la baſe eſt une roulette ſemblable à la baſe, ce qui eſt connu. Mais les touchantes de cette roulette, ou bien les perpendiculaires à la roulette *ADI*, ſeront des lignes paralleles aux cordes du cercle *EF*, *EG*, *EH* qui feront des angles égaux entr'eux au point *E*; & par conſéquent les touchantes *BK*, *CL*, *DM* de la roulette *ADI*, qui ſont auſſi paralleles aux cordes *IF*, *IG*, *IH* feront des angles égaux entr'eux, puiſque ces cordes ſont des angles égaux entr'eux au point *I*.

Mais par les proprietez connues de la roulette, on ſait que les longueurs des lignes *BK*, *CL*, *DM* ſont égales au double de la difference qui eſt entre le diametre *IE* du cercle générateur & les cordes *IF*, *IG*, *IH*: c'eſt pour-

quoi ſi du centre *I* & pour rayon *IE* on décrit le quart de cercle *EQR*, & ſi l'on prolonge les cordes *IF*, *IG*, *IH* juſqu'au quart de cercle en *OPQ*, les lignes *BK*, *CL*, *DM* ſeront chacune double de *FO*, *GP*, *HQ*: car les longueurs des parties de la roulette *IB*, *IC*, *ID* ſont doubles des cordes *IF*, *IG*, *IH*, & toute la roulette *IA* eſt égale au double *IE*.

Mais dans le demi-cercle toutes les cordes comme *IF* ſont égales aux ſinus comme *OS* du quart de cercle. C'eſt-pourquoi ſi l'on conçoit un cylindre droit ſur le quart de cercle *EPR*, & que ce cylindre ſoit coupé par un plan incliné au plan de ſa baſe d'un angle demi-droit & qui la rencontre en *RI*, on ſait que la ſuperficie de ce quart de cylindre compriſe entre la baſe & le plan coupant, ſera égale à la ſuperficie formée par tous les ſinus ſur leurs arcs, & égale au quarré du rayon *IE*; mais la ſuperficie de ce cylindre qui a pour hauteur le rayon *IE*, ſera égale au rectangle *IR* dont le côté *EPR* eſt égal à la circonference du quart de cercle, & le côté *IE* égal au rayon du quart de cercle. Mais auſſi la portion de cette ſuperficie cylindrique compriſe entre le plan coupant & le plan ſupérieur, ſera égale à la figure faite de toutes les parties *FO*, *GP*, *HQ*, qui ſont les differences entre les ſinus comme *OS*, ou les cordes comme *IF* & le rayon *IE* ou *IO*, & cette figure *EGVR* ſera le complément de la figure des ſinus *EGVI*.

Il eſt donc évident que toutes les lignes comme *OF*, *PG* dans le complément de la figure des ſinus, garderont toutes entr'elles la même proportion que les côtez *BK*, *CL*, *DM* des trian-

* FIG. XIX.

triangles qui compoſent la figure de la roulette *ALN*. Mais comme tous ces triangles ſont ſemblables comme *KCL*, *LDM*, &c. ils ſeront tous entr'eux comme les quarrez de leurs côtez, ou comme les cercles qui auront ces côtez pour rayons; & par conſéquent ſi l'on fait tourner la figure *EGVR* ſur la ligne *ER* comme axe, le Conoïde pointu qui s'en formera, ſera au cylindre qui ſe formera du rectangle *EV* qui tourne auſſi ſur *ER* pour axe, comme la ſomme de tous les petits triangles comme *KCL*, *LDM* qui compoſent la roulette *AIN*, au dernier triangle *INT* pris autant de fois qu'il y a de triangles dans la figure de la roulette.

Mais le dernier triangle *INT* pris autant de fois qu'il y a de triangles dans la figure de la roulette, eſt égal au quadruple du quart de cercle *IER*: car le dernier triangle qui a pour côté *IN*, eſt quadruple de celui qui a pour côté *IR*, & pour baſe une des diviſions du cercle comme *OP*: donc comme le cylindre formé par le rectangle *EV* eſt au conoïde formé par le complément de la figure des ſinus, ainſi le cercle entier ſur le rayon *EI* ſera à la ſuperficie de la roulette *ADINMA*; ou bien ſi ſur chacune des ordonnées *PT*, *Od* dans la figure des ſinus on prend *Pa*, *Ob* troiſiémes proportionnelles après *PT*, *PG* & *Od*, *OF*, &c. il y aura même raiſon du cercle ſur *PT* au cercle ſur *PG*, que de la ligne *PT* à la ligne *Pa*, &c. Donc le cylindre ſera au conoïde pointu comme le rectangle *EV* à la figure *EaVR*. Mais le rectangle *EV* n'étant conſideré que comme la moitié du cercle entier dont le rayon eſt *IE*, auſſi la figure *EaVR* ne donnera que la moitié de la roulette.

Maintenant pour la longueur de cette roulette *AMN*, puiſqu'il y a même raiſon entre la baſe *NY* du dernier triangle *INY* pris autant de fois qu'il y a de triangles, à la ſomme des baſes de tous les triangles, que du rectangle *EV* au complément *EaVR* de la figure des ſinus ; & que la ſomme de la baſe *NY* du dernier triangle, laquelle eſt double d'une des diviſions du quart de cercle comme *OP*, eſt double auſſi de la circonference du quart de cercle ; donc la circonference du demi-cercle qui a pour rayon *IE*, ſera à la circonference de la roulette *AMN*, comme le rectangle *EV* au complément *EGVR* de la figure des ſinus *EGVI*. Mais le rectangle *EV* eſt égal au demi-cercle dont le rayon eſt *IE*, & la figure des ſinus eſt égale au quarré du rayon : donc enfin la circonference du demi-cercle dont *IE* eſt le rayon, ſera à la roulette *AMN* comme la ſuperficie du demi-cercle, à la difference de cette même ſuperficie avec le quarré du rayon. Mais la ſuperficie du demi-cercle eſt à la difference entre cette même ſuperficie & le quarré du rayon, comme *IV* circonference du quart de cercle à la difference entre *IV* & *IE* ; donc la longueur de la roulette ſera double de la difference entre *IV* & *IE*, qui eſt auſſi la difference double entre le diametre du cercle générateur de la baſe & ſa demi-circonference.

METHODE GENERALE

Pour réduire toutes les Lignes courbes à des Roulettes, leur génératrice ou leur baſe étant donnée telle qu'on voudra.

Et premierement la baſe étant donnée de poſition, il faut trouver la génératrice de la Courbe comme étant une Roulette.

PAR M. DE LA HIRE.

* SOIT une ligne courbe *ADB* donnée telle qu'on voudra que l'on conſidere comme une roulette, dont la ligne † *CB* droite ou courbe ſoit auſſi donnée de poſition pour la baſe de cette roulette.

De tous les points *DLN* de la Courbe *A*, ſoit mené à la Courbe les perpendiculaires *DF*, *LM*, *NO*, &c. indéfiniment proche les unes des autres, leſquelles rencontrent la baſe donnée en *F*, *M*, *O*, &c.

Sur quelqu'une de ces perpendiculaires comme *DF* pour baſe, ſoit formé le triangle *DFG*, dont le côté *DG* ſoit égal à la plus proche *LM* des perpendiculaires après *DF*, & le côté *FG* égal à la partie indéfiniment petite *FM* de la baſe donnée & compriſe entre les perpendiculaires *DF*, *LM*. De même ſur *DG* pour baſe égale à *LM* ſoit formé le triangle *DGH* dont le côté *GH* ſoit égal à *NO*, & le côté *GH* égal à *MO*, & ainſi de ſuite tant d'un côté que d'autre de la premiere *DF* qu'on a priſe.

* 23 Août 1706. † FIG. XX.

Il ſe formera par ce moien une ligne droite ou courbe *IHGFK* qui ſera la génératrice de la Courbe *ADB* propoſée pour roulette, & dont la baſe *CB* eſt donnée de poſition, & le point *D* qui eſt l'extrémité de la perpendiculaire *DF* qu'on a priſe d'abord, ſera le point décrivant de la roulette par rapport à la génératrice trouvée dans la poſition où elle eſt ſur la baſe *CB*.

On voit par la formation de la génératrice trouvée *IHGFK* que lorſqu'elle roulera ſur la baſe *CB* propoſée, le même point *D* du plan de la génératrice, doit paſſer ſucceſſivement par tous les points de la Courbe *DLN*. Car la génératrice touchera la baſe dans tous ſes points *FMO*, lorſque les points de la génératrice *FGH* qui leur répondent y ſeront poſez, & alors les lignes *DG*, *DH* ſeront jointes aux perpendiculaires *LM*, *NO*. Et par conſéquent les lignes qui décrivent par leur évolution la baſe & la génératrice, auront une touchante commune qui paſſera par le point où la baſe & la génératrice ſe touchent ; ce qui ſuit de ce qui a été démontré d'abord.

Les differentes baſes propoſées pour une même Courbe donnée comme roulette, formeront des génératrices differentes qui auront des proprietez particulieres, comme toutes les baſes qui ne rencontreront pas perpendiculairement les roulettes propoſées, donneront des génératrices qu'on ne pourra terminer, quoique leur longueur ſoit connue qui eſt celle de la baſe. La Spirale dont tous ſes rayons font des angles égaux avec elle, eſt une Courbe de cette nature ; car ſi on la fait rouler ſur une ligne droite qui lui ſerve de baſe, la roulette qu'elle formera ſera une ligne droite ; & ſi une li-

ligne droite eſt propoſée comme une roulette, & qu'on donne une autre ligne droite pour ſa baſe qui ne lui ſoit pas parallele, on trouvera pour ſa génératrice une Spirale telle que nous venons de l'expoſer ; mais ſi la baſe étoit parallele à la roulette, la génératrice ſeroit un cercle, & le centre en ſeroit le point décrivant ; ce qui eſt vrai auſſi de toutes ſortes de Courbes propoſées, quand on propoſe pour ſa baſe une ligne qui lui eſt parallele ; ce qui eſt évident, puiſque tous les rayons comme *DF*, *DG*, *DH* ſeront tous égaux entr'eux.

Pour déterminer la nature de ces génératrices, il faut connoître quelque proprieté particuliere des perpendiculaires à la roulette propoſée par rapport à la baſe donnée, ou quelque choſe d'équivalent, comme on le verra clairement dans l'exemple ſuivant.

Exemple.

* Soit la Courbe *ADP* propoſée comme une roulette, & ſoit donnée ſa baſe *CB* une ligne droite. Aiant pris ſur la Courbe les parties *AD*, *DP* indéfiniment petites, ſoient menées les perpendiculaires *AF*, *DM*, *PO* à la Courbe ; mais aiant formé comme on a expliqué cidevant le triangle *AFG*, enſorte que les points *FG* ſoient ſur la génératrice, on donne cette proprieté, que dans tous les triangles comme *AFG* formez pour trouver la génératrice, l'angle *FAG* ſera égal à l'angle *AED* que font les deux perpendiculaires *AF*, *DM* en ſe rencontrant au point *E*.

Il s'enſuit de cette proprieté donnée que le

* Fig. XXI.

triangle *AEM* ou *AEG*, car les deux points *M* & *G* ne ſont regardez que comme un même point, ſera iſoſcele; & par conſéquent l'angle *AMD* exterieur du triangle *AME* ſera double de l'interieur *FAM* ou *FAG*.

Mais par ce qui a été démontré ci-devant, le point qui décrit la roulette étant en *A*, la touchante de la ligne qui décrit la génératrice *FG* par ſon évolution ſera *FM* perpendiculaire à la génératrice *FG* & à la baſe *CB*, & ſera auſſi jointe à celle qui décrit la baſe par ſon évolution.

De même dans la ſeconde poſition du point décrivant en *D*, la ligne qui décrit la génératrice par ſon évolution comme *MK* ſera auſſi perpendiculaire à la baſe *CB*. C'eſt pourquoi l'angle *DMK* ſera plus grand que l'angle *AFM* de la quantité de l'angle *AED* ou ſon égal *FAG*.

Mais lorſque le point *D* étoit au point *A* & *DM* en *AG*, la ligne *KM* perpendiculaire à la génératrice devoit être placée en *MG*, & elle devoit rencontrer *FM* en quelque point *N*, enſorte que l'angle *FNG* étoit double de l'angle *FAM*.

Car les points *M* & *G* n'étant conſiderez que comme un ſeul point, ſi l'angle *DMK* ſe meut ſur *M*, & que ſon côté *MD* paſſe en *MA*, le côté *MK* paſſera en *MN* ou *GN*, & l'angle *KGN* ſera égal à l'angle *DMA*. Mais l'angle *DMA* a été démontré double de l'angle *FAM*; donc l'angle *KGN* eſt double de l'angle *FAM* ou *FAG*. Mais auſſi à cauſe des paralleles *FN*, *MK*, l'angle *FNG* ſera égal à l'angle *KGN*; donc enfin l'angle *FNG* ſera double de l'angle *FAG*.

Il s'enſuit delà que les points *FGA* ſeront à la circonference d'un cercle dont le point *N* ſera le centre, & les lignes *NF*, *NG*, *NA* ſeront égales entr'elles.

Si l'on pourſuit la deſcription de la génératrice comme on a enſeigné, en cherchant un autre point *H*, enſorte que le triangle *AGH* ſoit formé par les lignes *PO* & *MO* ſur *AG* égale à *DM*, on démontrera comme on a fait ci-devant que l'angle *GAH* ſera la moitié de l'angle *GQH* formé par la ligne *GN* & par la ligne *OI* placée en *HQ*, & qui rencontrera *GN* en quelque point *Q*, & par conſéquent le cercle qui paſſeroit par les points *GHA* auroit ſon centre en *Q*, & les lignes *QG*, *QH*, *QA* ſeroient égales entr'elles; mais ce point *Q* placé ſur *GN* ne peut pas être different du point *N*, puiſque *NG* & *NA* ſont auſſi égales entr'elles; c'eſt-pourquoi le point *N* ſera le centre d'un cercle qui paſſera par les points *FGHA*.

On fera la même démonſtration pour tous les autres points qu'on trouvera de la génératrice; & par conſéquent la génératrice cherchée ſera un cercle qui aura *NF* pour ſon rayon, & dont le point décrivant *A* de la Courbe propoſée, ſera placé à l'extrémité d'un de ſes diametres.

Autre Exemple.

*Soit une Courbe *FB* donnée pour roulette, & la ligne droite *VA* auſſi donnée pour ſa baſe, & ſoit *FV* l'axe de la Courbe, qui eſt perpendiculaire à la Courbe en *F* & à la baſe en *V*.

Si de tous les points comme *B* de la Courbe on mene une perpendiculaire *BD* à la baſe,

* FIG. XXII.

la proprieté de cette Courbe eſt telle que ſi ſur *BD* comme diametre on décrit le demi-cercle *BOD*, & qu'on y mene la corde *BO* égale à l'axe *FV*, la ligne *BOA* ſera perpendiculaire à la Courbe *FB* propoſée.

Aiant tiré *DO*, on aura le triangle rectangle *DOB* ſemblable au triangle rectangle *ADB*; & par conſéquent le rectangle *AO*, *OB* ſera égal au quarré de *DO*.

Maintenant ſi ſur quelque perpendiculaire à la Courbe comme *BA*, ou ſur l'axe *FV* qui lui eſt auſſi perpendiculaire, on forme la génératrice *AIÎ* par la methode propoſée ci-devant, le point *B* étant le point décrivant, & toutes les lignes comme *BA*, *BH* repréſentant dans cette génératrice les perpendiculaires à la Courbe, & *BI* étant la plus courte qui repréſente *FV*, *BI* ſera auſſi l'axe de la génératrice, & la perpendiculaire *Id* ſur *BI* au point *I* repréſentera la baſe *VD* perpendiculaire à l'axe *FV* en *V*.

Il s'enſuit de la proprieté donnée que ſi du point *B* pour centre & pour rayon *BI* égale à *FV*, on décrit un cercle *IEO*, il doit paſſer par tous les points comme *O* des lignes qui repréſentent ſur la génératrice les perpendiculaires comme *BA* à la Courbe *FB*, & que *DI* menée du point *D* au point *I* de la génératrice, touchera le cercle en *I*, & ſera égale à *DO*. Car par la formation de la génératrice, puiſque la partie *BK* de la Courbe propoſée *BKF* eſt indéfiniment petite, & *AB* étant perpendiculaire à la Courbe en *B*, on peut conſiderer *AK* comme égale à *AB*, & *KL* étant auſſi perpendiculaire à la Courbe en *K*, le triangle *AKL* s'eſt placé en *ABH* pour la formation

mation de la génératrice, enſorte que *AH* égale à *AL* eſt la corde indéfiniment petite de la génératrice, & par ce mouvement l'angle *BAK* eſt égal à l'angle *HAL*. Mais par le Lemme ſuivant l'angle *AKL* eſt double de l'angle *BAK*; donc tous les angles enſemble comme *ABH* égaux aux angles *AKL* qui ſont formez dans la génératrice par les lignes menées du point *B* aux points de cette génératrice juſqu'à l'axe *BI*, feront enſemble un angle *ABI* double de tous les angles *BAK*, ou de ceux que font toutes les cordes comme *HAL* les unes avec les autres qui ſera l'angle *IdT*. Et ſi par tous les points *K* on mene des paralleles *KS* aux perpendiculaires les plus proches comme à *KA*, l'angle *AKS* étant égal à l'angle *BAK* qui eſt la moitié de l'angle *AKL*, on aura l'angle *SKL* égal à l'angle *BAK*. Mais auſſi tous les angles enſemble *SKL* que font toutes les perpendiculaires à la courbe les unes avec les autres de ſuite, ne peuvent être égaux qu'à l'angle *ABD* fait de la premiere *AB* & de la derniere *VF*, ou de ſa parallele *DB*: c'eſt-pourquoi l'angle *ABI* ſera double de l'angle *ABD*, & par conſéquent la ligne *Id* perpendiculaire à *BI* en *I* tombera ſur *ID*, & les deux triangles *DBO*, *DBI* ſeront égaux & ſemblables, & *DI* touchera le cercle *IEO* en *I* & ſera égale à *DO*.

Mais de plus, puiſque l'angle *DBI* eſt égal à l'angle *DBA*, & que *ADT* touche la génératrice en *A* & qu'elle rencontre l'axe *BI* en *T*, *DA* ſera égale à *DT*; & ſi du point *A* on mene *AR* parallele à *DI* ou perpendiculaire à l'axe *IB*, *IR* ſera égale à *IT*, ce qui eſt une proprieté de la touchante d'une parabole au

point

point *A*. Et comme ce ſera la même choſe pour tous les autres points de la génératrice *IHA*, les points *I* & *B* demeurant les mêmes, il s'enſuit que la génératrice ſera une parabole.

Mais comme les deux triangles rectangles *TAR*, *ADO* ont leurs angles égaux en *T* & en *A*, ils ſeront ſemblables, & *TR* ſera double de *AO*, comme *TA* eſt double de *AD*; donc *RI* eſt égale à *AO*, & par conſéquent le rectangle *RI*, *IB* ou le rectangle *AO*, *OB* qui lui eſt égal puiſque leurs côtez ſont égaux, lequel eſt égal au quarré de *DO*, ſera auſſi égal au quarré de *DI* qui ſera le quart du quarré de *AR* ordonnée à l'axe *IB* & double de *DI*; donc enfin le point *B* eſt le foyer de cette parabole.

LEMME.

* Soit le demi-cercle *HIG* dont le diametre *HG* eſt perpendiculaire ſur la touchante *GA* prolongée vers *F*, & ſoit une corde *HI* appliquée dans le cercle & prolongée en *A* à la touchante *GA*.

Soit auſſi *HE* perpendiculaire à *HA* au point *H*; & de quelque point *E* indéfiniment proche de *H* ſoit *EF* perpendiculaire à *GA* & par conſéquent parallele à *HG*, & ſur *EF* ſoit décrit le demi-cercle *ELF*. Du point *E* ſoit appliqué dans le cercle *ELF* la corde *EM* égale à la corde *HI* & prolongée en *D*, & ſoit mené *ELB* parallele à *HA*, & de plus la ligne *EA*.

A cauſe de l'angle *BED* indéfiniment petit, on a *EL* | *EM* || *ED* | *EB*. Mais à cauſe des paralleles qu'on a menées *EL* | *EM* ou *HI* ſon

* FIG. XXIII.

ſon égale || *EF* | *HG* & || *EB* | *HA* ou *EA* qu'on peut lui ſuppoſer égale : donc *ED* | *EB* || *EB* | *EA*.

Mais *DA* étant indéfiniment petite par rapport à *EB* grandeur déterminée, ſi l'on mene *RBS* perpendiculaire à *EB*, on doit auſſi la conſiderer comme perpendiculaire à *ED* & à *EA*.

C'eſt-pourquoi aiant *ED* | *EB* || *EB* | *EA*, ſi l'on diviſe, on aura *ED* | *EB* — *ED*, ce qui eſt *DR* || *EB* | *EA* — *EB*, ce qui eſt *SA*, donc *ED* | *EB* || *DR* | *SA*. Mais la difference des deux *ED*, *EB* eſt indéfiniment petite; donc la difference des deux *DR*, *SA* qui ſont elles-mêmes indéfiniment petites, ſera encore indéfiniment petite ; c'eſt-pourquoi elles doivent être conſiderées comme égales entr'elles, & *BR*, *BS* auſſi égales; & par conſéquent l'angle *BER* égal à l'angle *BES* égal à l'angle *EAH*; donc l'angle *AED* ſera double de l'angle *EAH*.

Secondement.

Une Courbe telle qu'on voudra étant propoſée comme une roulette avec une autre Courbe auſſi telle qu'on voudra pour être ſa génératrice, & donnée de poſition avec un point de la roulette ſur le plan de la génératrice, comme point décrivant, la génératrice étant dans la poſition donnée, il faut déterminer la baſe.

* Soit la Courbe propoſée *AP* pour roulette, & la Courbe *BE* pour génératrice qui eſt donnée de poſition par rapport à la roulette *AP*, quand le point décrivant *P* du plan de la génératrice eſt auſſi donné de poſition ſur la roulette quand la génératrice eſt en *BE*.

On

* Fig. XXIV.

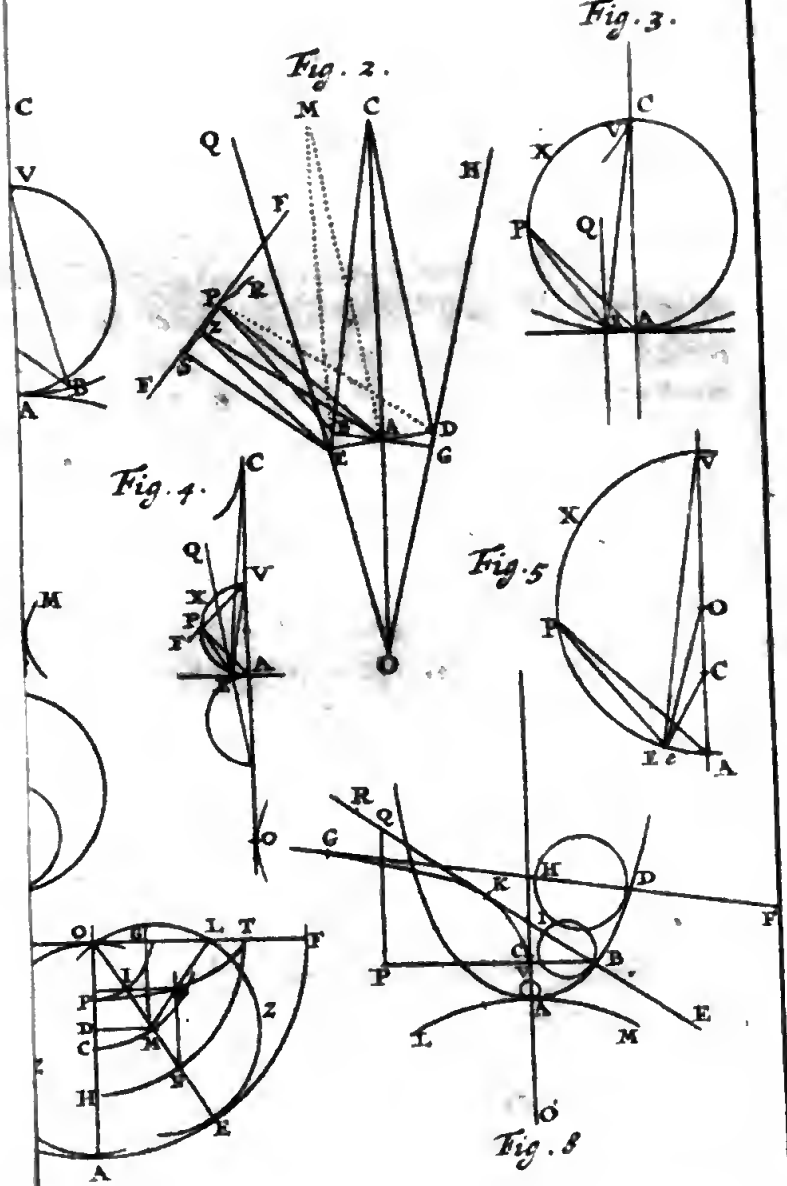
On ſuppoſe qu'on ſache mener des perpendiculaires tant à la Courbe *AP* qu'à la génératrice *BE*.

Soit donc du point *P* la perpendiculaire *PB* à la roulette *AP*, laquelle rencontre en *B* la génératrice *BE*. Soit auſſi par le point *B* de la génératrice la ligne *CB* qui lui ſoit perpendiculaire, & qui par les propoſitions précedentes doit auſſi être perpendiculaire à la baſe dans ce même point *B*, quand le point *P* décrivant eſt ſur la roulette. C'eſt-pourquoi ſi l'on mene *BF* perpendiculaire à *CB*, elle touchera la génératrice *BE* & la baſe auſſi dans ce même point *B*; & par conſéquent une portion de *BF* indéfiniment petite & contigue à ce point, ſera conſiderée comme partie de la baſe & de la génératrice tout enſemble.

Mais ſoit un autre point *A* de la roulette indéfiniment proche du point *P*, & par ce point *A* ſoit la perpendiculaire *AG* à la roulette, laquelle rencontre la génératrice en *G* dans la poſition où elle eſt, & la touchante *FB* en *I*. Maintenant ſi ſur *PB* on forme le triangle *PHB* dont le côté *BH* ſoit égal à *BG*, & le côté *PH* égal à *AG*.

Aiant fait mouvoir ce triangle *PHB* ſur le point *B*, enſorte que la ligne *BH* ſoit poſée en *BI* ſur *FB*, & le côté *HP* en *IL*, & *BP* en *BL*, l'angle *PBL* ſera égal à l'angle *HBI*, & les points *G* & *I* ne doivent être conſiderez que comme un même point, puiſque la partie *BI* de la touchante *FB* de la Courbe *GB* eſt indéfiniment petite.

Mais ſi dans cette poſition du triangle *HPB* en *ILB*, la ligne *IL* n'eſt pas poſée ſur *GA*, & qu'elles faſſent enſemble un angle comme *LIA*,



NAPOLI

Fig. 18.

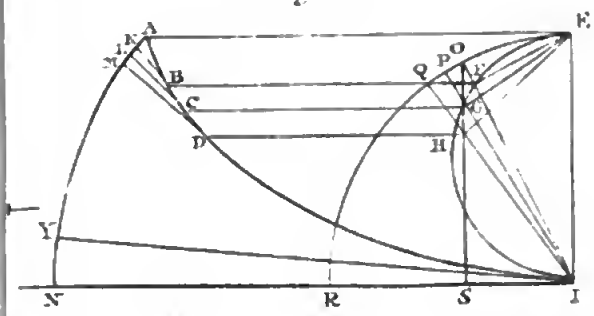


Fig. 24.

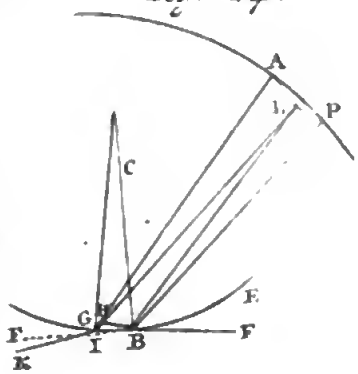
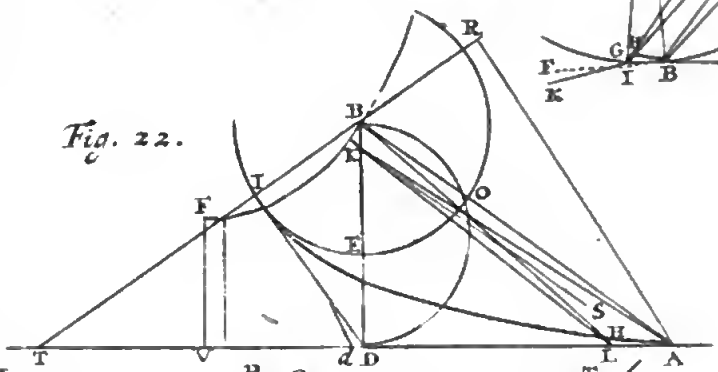


Fig. 22.



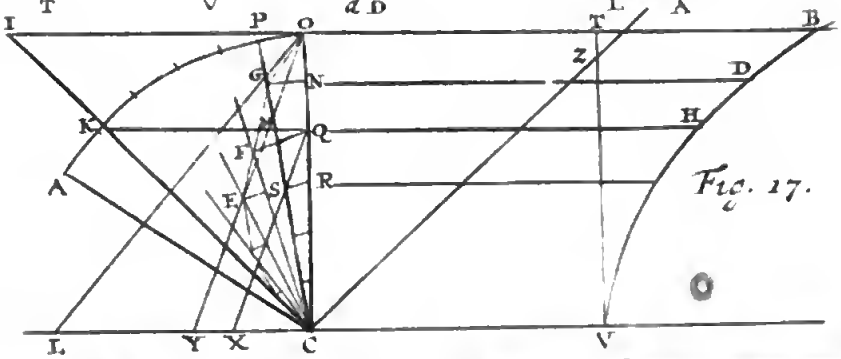
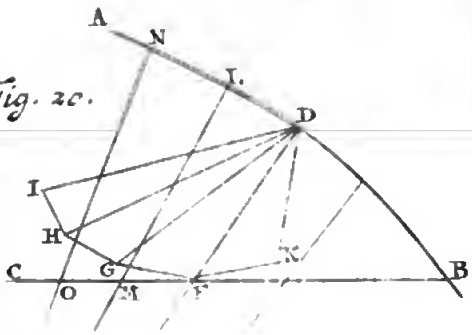


Fig. 17.

Fig. 20.



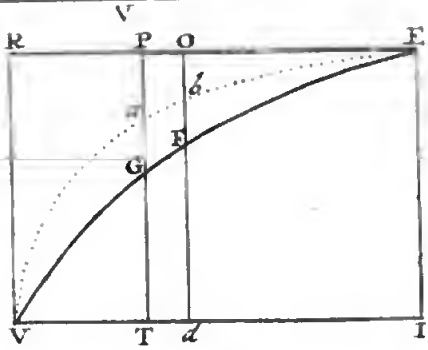


Fig. 19.

NAPOLI

LIA, par le point *I* ſoit menée la ligne *IK* qui faſſe avec *FIB* au point *I*, l'angle *FIK* égal à l'angle *LIA*, il s'enſuit que ſi l'on fait mouvoir ſur le point *I* le plan ſur lequel eſt le triangle *BIL*, enſorte que la ligne *IL* qui eſt *GD* ou *IA* ſoit placée ſur *IA*, la ligne *IF* qui étoit touchante de la baſe en *B*, ſera placée en *IK*, & le point *G* de la génératrice étant placé en *I*, toute la génératrice aura changé de place dans cette ſeconde poſition, enſorte que la perpendiculaire à *IK* au point *I* ſera touchante des Courbes qui décrivent la génératrice & la baſe par leur évolution, ce qui ſuit des premieres propoſitions. Ainſi on aura les poſitions de toutes les touchantes indéfiniment petites de la baſe, comme *BI*, *IK*, &c. ce qui formera cette baſe.

Il s'enſuit delà que ſi le point *L* eſt joint au point *A* après le premier mouvement que la ligne *HP* a fait en *IL*, la baſe aura un recourbement dans le point *B*; mais ſi le point *L* eſt placé entre *P* & *A* comme dans cette figure, la baſe aura ſa convexité tournée vers *P*, au contraire ſi le point *L* eſt au delà de *AI*, la baſe aura ſa concavité tournée vers *A*; car il faudra, dans le ſecond mouvement ramener *IL* en *IA*, ce qui ſuit des propoſitions qu'on a démontrées d'abord.

On pourra auſſi déterminer la nature de la baſe ſi l'on a quelque proprieté particuliere tant de la roulette donnée que de la génératrice: mais il me ſuffit d'en avoir indiqué la methode, comme j'ai fait dans l'exemple précedent pour la détermination de la génératrice par les proprietez de la roulette & de la baſe.

SUI-

SUITE DE LA PREMIERE

Partie du Supplément au Memoire ſur la Voix & ſur les Tons.

PAR M. DODART.

IV. ADDITION.

De la difference des tons de la parole & de la voix du chant par rapport au recitatif, & par occaſion, des expreſſions de la Muſique antique & de la Muſique moderne.

* JE n'avois pas deſſein de rien dire ſur la difference des tons de la voix de la parole & de la voix de chant: mais à l'occaſion de ce que j'ai dit ſur la difference du ſon de ces deux voix, je dirai ce que je penſe ſur la difference de leurs tons, ſur ce en quoi elle conſiſte, ſur l'uſage qu'on en fait dans la Muſique recitative, ſur celui qu'on y en pourroit & peut-être qu'on y en devroit faire, & ſur ce qu'on pourroit attendre pour la perfection de cet Art en ce qui eſt du chant, dans le progrès merveilleux qu'il a fait pour la ſymphonie depuis ſon renouvellement, c'eſt à dire depuis près de 700 ans juſqu'à preſent. Car ce bel Art avoit été abſolument perdu durant plus de 700 autres années avant *Gui d'Arezzo* pere de la Muſique telle que nous l'avons, très-differente de l'antique, fort au-deſſus pour le contre-point, & peut-être même pour le chant en ce qui regarde le plaiſir de l'oreille, mais fort au-deſſous en tout ce que le chant peut avoir

* 14. Avril 1706.

avoir de capable de toucher le cœur par l'expreſſion des mœurs & des paſſions, dont les anciens *Grecs* ont ſû tirer de ſi grands avantages. Car la Muſique étoit chez les Anciens un Art très-ſerieux, étant conſideré comme important au gouvernement des Etats par la part qu'ils lui donnoient à l'éducation de la jeuneſſe. Cet âge s'étendoit à cet égard juſqu'à 28 ans chez certains Peuples, & chez d'autres juſqu'à 30. Le but des Anciens du premier âge immédiatement après les temps heroïques, environ mille ans avant l'Ere commune, étoit de former les mœurs, de moderer les paſſions qui les pouvoient corrompre, & d'exciter celles qui pouvoient les regler & les conſerver, & cela par un moien agréable capable d'inſinuer la vertu. Celle-ci étoit leur fin, & le plaiſir le moien. Ainſi leur principale attention dans la Muſique étoit d'émouvoir certaines paſſions, & calmer les autres pour parvenir au reglement des mœurs & toucher le cœur d'une maniere convenable à ces deux intentions. Quant au reſte, c'eſt à dire le plaiſir de l'oreille, ils n'y avoient d'égard qu'autant qu'il étoit poſſible ſans préjudice de leur principale intention.

Il falloit donc imiter dans le chant les tons les plus naturels aux paſſions, & ces tons doivent être dans la Muſique recitative, & on peut même dire en toute Muſique, ſur tout dans la vocale, les plus reſſemblans qu'il ſe peut à ceux de la parole, car la parole a ſes tons comme le chant a les ſiens. On connoît les tons de la parole dans la converſation; mais ces tons paroiſſent beaucoup plus dans les diſcours des perſonnes agitées de quelque paſſion que ce ſoit, & chaque paſſion a ſes tons & ſes mouvemens, au ſens auquel on a coûtume de prendre ce mot en

Mu-

Muſique. Les tons devroient être à peu près les mêmes en toute nation, car la nature eſt la même partout; cependant il n'en eſt pas abſolument ainſi. Il s'y mêle des tons d'inſtitution qui ſont ceux des Langues & des Dialectes; mais malgré ce mêlange un homme attentif à une converſation paſſionnée entre pluſieurs perſonnes de quelque nation que ce ſoit dont il ignoreroit la Langue, diſtinguera facilement par l'oreille ſeule quelle eſt la paſſion qui anime la converſation.

Il n'eſt pas aiſé de rapporter ces tons à la Muſique. Une perſonne paſſionnée ne penſe ni à chanter ni à divertir l'oreille, il ne tend uniquement qu'à toucher le cœur en la maniere qui lui convient; par exemple, d'effroi ou de pitié, qui ſont les paſſions regnantes dans le tragique, ou de quelqu'autre paſſion ſelon les occaſions qui ſe preſentent dans la vie commune. Tout cela n'eſt touchant dans les ſpectacles & dans la Muſique, que parcequ'il l'eſt dans les actions ordinaires des hommes. Ainſi les tons & les mouvemens qui ont rapport aux paſſions ne ſont touchans dans la Muſique, qu'autant qu'ils ſont conformes aux tons & aux mouvemens que la paſſion produit dans le commerce ordinaire. Les intervalles des ſons de la parole ne ſont ſouvent que d'un demi-ton, quelquefois hors de mode, ſouvent d'un quart de ton. Cependant c'eſt delà que dépend preſque tout ce que la Muſique peut avoir de touchant par l'expreſſion des paſſions dans ſa partie harmonique. Car ils en comprenoient ſix ſous le nom de Muſique. Celle qu'ils comptoient la premiere & qu'ils regardoient comme la principale étoit la Rythmique, & celle qu'ils comptoient la derniere & qu'ils conſi-

deroient

deroient le moins étoit l'Harmonique. Ils ſouffroient les fautes & les licences en celle-ci, mais ils n'en pardonnoient aucune dans la Rythmique. Cette partie regloit les démarches & certains autres mouvemens, le temps & la cadence de la recitation, les geſtes & la compoſition de toute la perſonne, & apparemment plus celle de ſon viſage que de tout le reſte du corps; car ils vouloient que tout concourût à l'expreſſion des mœurs & des paſſions. Cela étant, ce qu'ils pouvoient faire de mieux dans la partie harmonique de la Muſique pour arriver à cette expreſſion, c'étoit de ſe rendre attentifs aux inflexions naturelles de la voix paſſionnée, & de tâcher de les imiter dans la compoſition du chant. C'eſt ce qui a donné lieu au genre Chromatique de *Timothée* de *Milet* par les demi-tons hors de mode, & à l'Enharmonique d'*Olympe* par la ſubdiviſion des demi-tons en quarts de ton.

On peut bien & mal uſer de ces ſubdiviſions par rapport aux mœurs, car elles peuvent flatter les paſſions dangereuſes, comme elles peuvent ſervir à en exciter de louables & d'utiles. Mais ſans entrer ici dans l'abus qu'on en peut faire, ces ſubdiviſions ont ſervi dans la Muſique antique à former une partie de ſes expreſſions, & d'ailleurs il paroît certain que le genre enharmonique ne peut avoir été introduit que pour cette ſeule raiſon, n'offrant rien à l'oreille qui ne la doive bleſſer par la bizarrerie de ſes intervalles, ni qui puiſſe plaire, ſinon au cœur par une expreſſion capable de le toucher, & par conſéquent capable de lui plaire dans l'imitation. Car il ſemble qu'on peut regarder le cœur à cet égard comme l'organe d'un ſixiéme ſens d'autant plus

plus diſtingué des cinq ſens externes, qu'aiant beſoin des organes externes pour être ébranlé, & ne l'étant ordinairement que par leur rapport, il eſt ſouvent agreablement touché dans l'imitation, de ce qui frapperoit le cœur de la même maniere, hors le cas de l'imitation.

Quoiqu'il en ſoit, les expreſſions de la Muſique antique alloient à peindre les paſſions, dont les Legiſlateurs, les Magiſtrats & les Philoſophes approuvoient la repréſentation pour former les mœurs de l'Etat à la magnanimité, à l'humanité & à la ſageſſe, par la crainte & la pitié; plus curieux d'inſtruire & de toucher le cœur par des ſentimens qui ſont les grands hommes, que de plaire à l'oreille en flattant les paſſions baſſes qui les aviliſſent, & qui n'ont nul beſoin du ſecours de la Muſique pour être excitées. Ces chants ſi concertez d'après nature n'étoient accompagnez pour tout contre-point que d'une eſpece de contre-partie en quarte, en quinte ou en octave ſur l'inſtrument qui accompagnoit la voix; car les Anciens ne reconnoiſſoient pour accords ni les tierces ni les ſixtes qui donnent un ſi grand jeu à la compoſition à pluſieurs parties.

Cependant malgré cette ſimplicité ces chants faiſoient ſur les hommes, au moins une partie des grands effets auſquels toute l'antiquité rend témoignage. Effets ſurprenans qu'on a peine à croire en ce temps-ci, où on n'éprouve plus rien de pareil de la Muſique. Il ne ſeroit pourtant pas impoſſible de prouver non-ſeulement la poſſibilité, mais encore la verité d'une partie de ces grands effets. Mais cela ne ſe peut que dans un Memoire particulier, celui-ci n'étant déja que trop long.

Il

Il n'auroit peut-être pas été impoſſible aux Anciens de rendre leur melodie morale & pathetique plus agreable, en la joignant avec une baſſe continue, s'ils avoient ſû le contre-point. Ils auroient même pû y joindre plus d'agrément, s'ils avoient connu le contre-point figuré : mais l'honneur du premier contre-point étoit reſervé * à l'onziéme Siecle de l'Ere commune, & l'honneur du ſecond au † quatorziéme. On pourroit donc dans 49 chordes du ſyſtême moderne, multipliées par le rétabliſſement des chordes du genre enharmonique juſqu'au nombre de 97, trouver tout enſemble & la Muſique expreſſive des Anciens, & l'agrément de la ſymphonie moderne, malgré les demi-tons hors de mode du Chromatique, & les quarts de ton de l'Enharmonique : mais trois cauſes nous priveront toûjours de cet avantage, malgré tous les efforts de la Muſique moderne pour parvenir à l'expreſſion. La premiere cauſe eſt l'impoſſibilité de faire entonner juſte aux Muſiciens des quarts de ton. C'eſt ce qui a fait renoncer toute la Muſique antique depuis *Ariſtoxene*, & à plus forte raiſon toute la Muſique moderne au genre Enharmonique. La ſeconde cauſe eſt le peu de litterature d'une grande partie des Maîtres de l'art. La troiſiéme qui eſt une ſuite de la ſeconde, le peu d'attention que la plûpart des Maîtres donnent à imiter les tons naturels. Ce n'eſt pas que tous les Maîtres de Muſique ne ſe piquent d'imiter, mais toute l'imitation que pluſieurs ſe propoſent ne conſiſte gueres en ce qu'il y a de moral dans le ſujet. C'eſt, par exemple, monter le ton quand le mot *Ciel* entre dans

* *A* Guy d'Arezzo *qui vivoit en* 1024.
† *A* Jean des Murs *qui vivoit en* 1358.

la lettre du ſujet, baiſſer le ton quand il y eſt parlé de la *Terre* & des abîmes, quoiqu'il fallût ſouvent faire tout le contraire par rapport au ſens de la lettre. C'eſt encore imiter le bruit d'une tempête, ou d'un fracas, ou du tonnerre, ou l'agitation de la mer & des vents, quelquels chûtes ou quelques vols qui ſont choſes ſi étrangeres à tout ce qu'il peut y avoir de moral dans la Muſique, que rien au monde n'eſt plus propre à le faire entierement perdre de vûe. Cette imitation moderne conſiſte encore, & trop ſouvent, à exprimer par des tons & des mouvemens gais le ſens d'une parole gaie, enclavée dans un ſujet ſerieux, grave ou même triſte, ou à repréſenter le ſens d'une parole triſte dans un ſujet tout enjoué, & tout cela parce-qu'une partie des Maîtres ne cherche dans la Muſique que la ſurpriſe de l'oreille des Auditeurs, ſans aucun égard à ſatisfaire leur propre raiſon & celle de l'Auditeur. Je paſſe ſous ſilence ces longs paſſages * ſouvent compoſez de doubles & triples croches ſur une ſeule ſyllabe, ces repetitions ſi multipliées, ces fugues & mille autres ſemblables jeux de compoſition, admirables ſurtout dans la Muſique inſtrumentale, mais qui ne ſignifient rien dans la Muſique vocale ſinon la délicateſſe, la ſoupleſſe & la legereté d'un goſier capable de franchir ces paſſages à perte d'haleine, ſur une ſeule ſyllabe, & le profond ſavoir d'un Compoſiteur capable de ſoûtenir l'agréable jeu de tant de parties les unes avec

* *J'en ai vû 46 ſur une ſyllabe dans un motet d'*Occupati. *Ce motet étoit ſur le dernier Verſ. du Pſeaume* CXVIII. Erravi ſicut ovis quæ periit, quære ſervum tuum quia mandata tua non ſum oblitus. *Et le paſſage étoit ſur la ſyllabe* quæ *dans* quære.

vec les autres. Car il n'y a perſonne qui ne s'apperçoive dans un moment de reflexion que tout cela ne va point au cœur, & n'eſt capable que de plaire à l'oreille & de la ſurprendre; ce qui paroît, comme j'ai dit ci-deſſus, être l'unique ou le principal but de la Muſique moderne. Il n'y a donc nulle apparence ni d'eſperer le rétabliſſement de la Muſique morale des Anciens pour la compoſition du chant & pour la culture politique des bonnes mœurs, ni de craindre ce rétabliſſement pour le mauvais effet qu'il pouvoit produire dans les mœurs, ſi on entreprenoit ce rétabliſſement ſur le plan des mœurs publiques, & d'ailleurs rien n'eſt ſi oppoſé à la conciliation de la Muſique ancienne avec la moderne, quelque avantage réciproque qu'elles puſſent tirer l'une de l'autre, que le charme des ſymphonies d'apreſent, à cauſe de l'avantage que leur donne le ſyſtême moderne par ſes 49 chordes ſur le ſyſtême des *Grecs*, qui dans ſa plus grande richeſſe n'a jamais eu que quinze chordes en chaque genre reglées ſur l'étendue ordinaire de la voix. Cela ſuffit ſur la difference des tons de la parole aux tons muſicaux.

V. ADDITION.

Les muſcles propres des cartilages du larynx ne donnent aucun mouvement à la Glotte, qui ne ſoit contraire à la formation de la voix, ou qui y contribue immédiatement.

* J'ai dit dans les notes ſur le Memoire de la voix, que qui conſiderera bien les ſuites de

* 4 Septembre 1706.

la Mechanique du larynx, telle que je l'ai décrite, tiendra pour prouvé que le ſeul uſage des muſcles propres exterieurs du larynx à l'égard de la voix, eſt de tenir ferme & ouverte la caiſſe compoſée des cartilages du larynx pour ſervir d'appui à la Glotte dans ſon mouvement actif, neceſſaire pour la voix: car elle a des mouvemens paſſifs par certains muſcles lateraux tant externes propres du larynx qu'internes propres à la Glotte même. Mais de ces muſcles les externes ne peuvent que relâcher la Glotte & par conſéquent nuire à la voix, & les internes ne peuvent gueres que faciliter l'évacuation des gros excremens du poûmon. J'avois invité dans la même note Meſſieurs les Anatomiſtes à examiner cette matiere qui paroit importante pour confirmer la cauſe préciſe de la voix. En attendant leur déciſion je dirai pour y donner lieu ce qui m'eſt venu dans l'eſprit ſur ce ſujet.

Tout ce que j'ai lû d'Anatomiſtes imprimez qui ſont entrez dans le détail des organes de la voix & des tons, ont crû que l'uſage des muſcles propres du larynx eſt de dilater la Glotte & de la reſſerrer ou de l'accourcir & la dilater pour les tons bas, & de l'allonger & étrecir pour les tons hauts.

Il me paroît impoſſible que cela ſoit. La démonſtration Mechanique réſulte de la poſition des muſcles tant interieurs qu'exterieurs, telle qu'elle eſt décrite ſous la note ſuſdite; car elle démontre qu'ils ſont incapables d'augmenter ou diminuer la glotte, au moins d'une maniere qui puiſſe contribuer à la voix. De plus le raiſonnement ſuivant me ſemble démonſtratif.

Tous

Tous les mouvemens du larynx qui accourciroient la glotte approcheroient le cartilage anterieur des poſterieurs. Or par cette approche ils en relâcheroient les levres, & il faut neceſſairement qu'elles ſoient bandées pour produire le ſon de la voix; car ſans cela il n'y auroit nul fremiſſement, & ſans fremiſſement il n'y auroit nul ſon de voix. De plus tous les mouvemens du larynx qui l'étreciroient iroient à l'allonger, ceux qui la dilateroient tendroient à l'accourcir. Or un de ces effets iroit à détruire ou à compenſer l'autre, & par cette compenſation il n'y auroit plus de changement de ton; car allonger eſt augmenter, & par-là tendre à produire un ton plus bas: étrecir eſt diminuer, & par-là tendre à produire un ſon plus haut. Ainſi le même mouvement iroit ou à produire deux effets incompatibles, ou à jetter à peu près le même ſon ſi on diminuoit autant l'ouverture en l'étreciſſant qu'on l'augmenteroit en l'allongeant, & réciproquement ſi on diminuoit autant l'ouverture en l'accourciſſant qu'on l'augmenteroit en la dilatant. Auſſi voit-on dans la coupe ou embouchure des anches des haut-bois que celles qui ſonnent le plus bas ſont tout enſemble & les plus ouvertes & les plus longues, & que les anches qui ſonnent le plus haut ſont tout enſemble & les plus ſerrées & les plus courtes. Les glottes depuis le plus bas âge où on a la voix la plus claire juſqu'à l'âge fait, où la voix eſt la plus grave vont toûjours en s'ouvrant & s'allongeant de plus en plus à proportion du progrès de l'âge juſqu'à l'âge de puberté, où l'accroiſſement précipité de tout le larynx fait müer la voix.

VI. ADDITION.

La ſuppreſſion totale de l'air par la glotte fermée exactement, confirme la même verité.

On peut voir dans le Memoire auquel celui-ci ſert de ſupplément, la deſcription de l'ouverture de la glotte en l'état où elle eſt miſe pour produire la voix, & ſous la note *b* l'état où eſt cette ouverture quand il ne s'agit que de reſpirer, ou de parler bas, ou de ſouffler, ou de donner iſſuë aux excremens du poûmon; car elle a tous ces uſages ſans compter le nombre infini d'uſages differens renfermez dans celui de produire la voix dans les ſons innombrables que l'execution de la Muſique ſuppoſe. Mais il n'eſt parlé dans ce Memoire qu'en un endroit & ſeulement en paſſant d'un troiſiéme uſage, qui conſiſte dans la ſuppreſſion totale & volontaire de la reſpiration, & il n'en eſt dit qu'un mot dans les notes, parceque dans ces deux endroits il ne s'agiſſoit pas principalement de cet uſage, mais indirectement.

Cependant on peut tirer un grand avantage pour l'établiſſement de la cauſe préciſe de la voix, de l'état où la glotte ſe met elle-même en ſupprimant l'air, & ſe rendant incapable par-là de produire en ce moment aucun ſon de voix. Car la cauſe principale & préciſe de la voix eſt fondée toute entiere ſur le mouvement volontaire & actif des deux cordons muſculeux tendineux qui conſtituent les levres de la glotte, & qui doivent produire tous les mouvemens. Or plus on eſt obligé de les reconnoître actifs pour la ſuppreſſion totale de l'air, plus on doit les re-

reconnoître actifs pour l'économie de la dépense de l'air dans son passage gradué pour la formation des differens sons. Car on ne peut fermer le passage de l'air qu'en passant par tous les degrez de resserrement depuis le premier jusqu'à l'extrême, duquel résulte la réduction de la ligne circulaire de chacune des levres à la ligne droite, d'où s'ensuit le contact immédiat des deux levres dans toute leur étenduë, & conséquemment l'entiere suppression de l'air.

Dans les premiers degrez d'approche mutuelle des deux levres, on peut chicaner en attribuant la cause du rétrecissement de la glotte pour la production de tons de la voix de bas en haut aux muscles internes du larynx: mais on ne leur peut attribuer ni de fermer entierement la glotte, ni de remplir entierement tout le canal du larynx. Or il faudroit qu'ils fissent l'un ou l'autre pour supprimer totalement la respiration. Il ne faut que considerer le volume de ces muscles tapis sur le concave du larynx de part & d'autre de la glotte, les attaches haut & bas de chacun de ces muscles haut & bas au-dessous de la glotte, la nature & la situation des parties auxquelles ils sont attachez, pour voir qu'ils sont incapables de satisfaire à aucun de ces deux usages; & en effet, s'ils font quelque chose aux mouvemens de la glotte, c'est pour l'ouvrir quand elle est entierement relâchée pour laisser l'issuë libre aux excremens du poûmon, & non pour la resserrer. De tout cela résulte ce raisonnement.

Les tons de la voix sont certainement l'effet d'un mouvement volontaire capable de resserrer la glotte moins ou plus en autant de degrez qu'il y a de tons actuels & possibles. Ce mou-

vement volontaire ne peut être celui des muſcles propres du larynx. Ce n'eſt pas celui des muſcles externes tant anterieurs que poſterieurs, qui ne peuvent que dilater la caiſſe du larynx en tout ſens. Ce n'eſt pas celui des muſcles externes lateraux qui ne peuvent que relâcher la glotte, ni celui des muſcles internes qui ne peuvent que la dilater pour donner paſſage aux gros excremens du poûmon. Il faut donc que ce ſoit quelqu'autre partie ſoûmiſe à la volonté, qui par ſes attaches & ſa direction ſoit capable de reſſerrer la glotte naturellement ouverte, & de la reſſerrer en tous les degrez muſicaux depuis ſon ouverture naturelle juſqu'à ſon entiere clôture excluſivement.

Or les cordons des levres de la glotte ont leurs attaches, leur direction, leur poſition très-convenable à cet effet en tous degrez, & même à fermer exactement la glotte.

Ces cordons doivent donc être chacun de ſon côté l'organe du rétreciſſement gradué de la glotte pour les tons muſicaux du plus bas au plus haut ſon dans chaque glotte.

VII. ADDITION.

Les changemens de la Glotte viennent de la Glotte même par deux muſcles de ſtructure extraordinaire.

Comment ces cordons ne ſeroient-ils pas l'organe du rétreciſſement gradué de la glotte, puiſqu'ils ſont certainement celui de la clôture abſolue de la glotte ? Car il eſt certain que la glotte ne peut paſſer de l'état de ſon ouverture naturelle, qui eſt celui qui convient à la reſpi-

ra-

ration libre, à celui de la clôture abſolue, d'où s'enſuit la ſuppreſſion de toute reſpiration; qu'en paſſant par tous les degrez poſſibles du rétreciſſement. Or comme cette diminution pouſſée juſqu'à l'entiere ſuppreſſion de l'air eſt abſolument volontaire, il faut que l'organe de ce mouvement ſoit conſtruit de maniere à pouvoir être commandé par la volonté; il faut donc que chacun des cordons cachez dans les levres de la glotte ſoit ou un muſcle ou quelque choſe d'équivalent, c'eſt à dire un muſcle d'une ſtructure differente de la ſtructure ordinaire du muſcle, à moins qu'on ne voulût dire que la volonté de l'homme produit ce mouvement ſans organe; ce qui ne ſe peut dire en Phyſique, ni propoſer en Metaphyſique ſans égaler la volonté de l'homme à celle du Créateur. Or c'eſt ce qu'on ne peut prétendre raiſonnablement; ce n'eſt pas certainement un muſcle ordinaire, c'eſt donc un organe extraordinaire équivalent à un muſcle ordinaire, ſinon dans ſa ſtructure, au moins dans ſon action.

Un Anatomiſte célébre qui a bien voulu verifier par une diſſection exacte ce que je lui avois dit de ces cordons cachez dans les levres de la glotte, conſideroit comme ligamenteux ces deux cordons que j'appellois muſculeux tendineux. C'eſt une epithete dont je m'étois aviſé pour marquer par un mot inventé ce que je voyois d'extraordinaire dans ces cordons, muſculeux dans leur action, quoiqu'ils ne paroiſſent que tendineux dans leur ſtructure. Cet Anatomiſte les conſideroit comme ſimplement ligamenteux, parcequ'il n'y remarquoit non-plus que moi aucune trace de fibres charnues à aucune des deux extrémitez, ni mêlées avec les

fibres du cordon; mais ſeulement quelques fibres charnues paralleles à ces cordons, & qui ne faiſoient pas un ſeul corps avec eux: de ſorte que je ne croyois pas poſſible de ſoûtenir que ces fibres charnues fiſſent avec ces fibres tendineuſes un corps de muſcles capable de mouvement volontaire qui pût conſtituer ces cordons tendineux en qualité de muſcles, n'y trouvant pas la ſtructure des autres muſcles du corps humain. Je trouvois donc alors ſa difficulté bien fondée, & elle l'étoit en effet à juger des choſes ſelon la ſtructure ordinaire.

Mais j'ai penſé depuis que l'action de ces cordons tendineux étant prouvée tant par leur poſition que par l'excluſion de toute autre cauſe capable de produire une action auſſi marquée que celle qui produit le contact parfait des deux levres de la glotte, on ne pouvoit ſe diſpenſer de conſiderer ces deux cordons comme deux inſtrumens du mouvement volontaire, c'eſt à dire comme deux muſcles d'une ſtructure particuliere.

Dès qu'on ne peut ſe défendre d'admettre cette ſtructure differente de celle de tout autre muſcle, il eſt avantageux de la recevoir comme un nouvel exemple ajoûté au nombre infini d'autres exemples de ſtructures differentes pour parvenir à un même effet, en d'autres genres d'effets qui prouvent comme celui-ci la richeſſe infinie de la Mechanique du Créateur.

Toutes les inſtances fondées ſur les inconveniens prétendus, tirez du ſeul extraordinaire de la ſtructure ſeroient donc alleguez mal à propos, à moins qu'on ne fît voir que cette ſtructure extraordinaire eſt incompatible avec leur action. Mais comment le pourroit-on montrer?

trer ? On connoît beaucoup mieux la ſtructure des grands muſcles de ſtructure ordinaire, mais on n'en ſait gueres mieux ce que cette ſtructure contribue à leur accourciſſement ; & qui pourroit empêcher que dans un auſſi petit muſcle on ne ſuppoſât une ſtructure tendineuſe inviſible ſemblable à celle qu'on remarque dans la partie charnue des autres muſcles ? On connoît des contractions dans un nombre infini de fibres purement membraneuſes au moins en apparence, c'eſt à dire, autant que les yeux ſont capables de diſtinguer les parties dites vulgairement ſpermatiques de celles qu'on nomme charnues. Le mouvement periſtaltique des inteſtins grêles ne s'execute pas autrement que celui de l'éſophage, Les mouvemens periſtaltiques des boyaux ne ſont pas à la verité ſoûmis à la volonté, mais ils n'en ſont pas moins reglez en eux-mêmes, & il ne leur manque rien pour être cenſez volontaires, que d'attendre les ordres de la volonté pour entrer en exercice, & pour interrompre, preſſer, ou rallentir leur action. Cette action s'execute avec un ordre merveilleux, chaque fibre membraneuſe circulaire entrant en mouvement à ſon rang pour exprimer & tranſmettre la charge du boyau à la fibre voiſine inferieure qui ſe reſſerre à ſon tour pour le même effet : ſans que cette ſucceſſion de mouvement ſoit troublée ni interrompue tant que le beſoin ſubſiſte dans l'animal en ſanté à cet égard. Les mouvemens progreſſifs des vers ne ſont pas plus reglez, & perſonne ne peut nier que ces mouvemens dans les vers ne ſoient volontaires au moins ſelon la maniere ordinaire de parler, & parfaitement ſemblables au mouvement vermiculaire des boyaux quant à l'exe-

cution, quoique differente dans le principe.

La dépendance des muſcles à l'égard de la volonté eſt manifeſtement d'inſtitution, auſſi-bien que l'union d'une ame immortelle à un corps mortel. Ce n'eſt pas que l'Auteur de cette inſtitution n'ait donné des organes convenables à l'execution de cette dépendance, & ces organes ſont les muſcles; mais on ne voit pas clairement dans ce qu'on connoît de leur ſtructure, comme il a été dit, la raiſon de leur mouvement, quoiqu'on ſoit aſſuré que cette ſtructure & l'influence des eſprits ſont la cauſe immédiate de leurs mouvemens. Il eſt vrai que les cordons de la glotte ſont fort differens des muſcles: mais s'il avoit plû au Créateur de les faire dépendre de la volonté, on en ſeroit quitte pour admettre deux ſortes d'inſtrumens, des mouvemens volontaires, c'eſt à dire des muſcles, les uns charnus & ſanguins, les autres ſpermatiques. Car enfin dans les fibres blanches comme dans les fibres rouges, le mouvement eſt également, contraction par l'influence des eſprits, & relâchement par la ſuſpenſion du mouvement des eſprits ou par leur diſſipation. De quelque cauſe que procede le mouvement ou la ſuſpenſion du mouvement, il ſe fait également dans les fibres blanches comme dans les rouges, & apparemment par la même mechanique ou par une mechanique équivalente. La ſeule difference que j'y trouve eſt, que c'eſt le ſeul beſoin qui exige le mouvement des fibres blanches, & la ſeule volonté qui commande le mouvement des fibres rouges. Mais ni le beſoin, ni la volonté n'influent rien par eux-mêmes dans les organes. Le beſoin & la volonté précedent & accompagnent, l'un les mouvemens

vemens des fibres blanches, l'autre ceux des fibres rouges : mais l'un & l'autre n'en ſont que l'occaſion, & ni l'un ni l'autre n'en ſont les cauſes, puiſqu'il eſt clair que ſans l'inſtitution divine le beſoin exigeroit en vain les mouvemens des fibres blanches ; & la volonté commanderoit inutilement celui des fibres rouges. Ces organes ne ſont nullement ſoûmis par eux-mêmes ni à la volonté, ni au beſoin. Car celui-ci ne peut être une cauſe active, puiſque ce n'eſt ſouvent qu'une pure privation ; & quant à la volonté, quelque active qu'elle ſoit en tout ce qui eſt compris dans l'étendue de ſon activité, c'eſt à dire de ſon pouvoir, elle en a auſſi peu par elle-même ſur les corps les plus délicats, que les corps les plus délicats & les plus mobiles ont par eux-mêmes peu d'intelligence pour recevoir les ordres de la volonté : pour les comprendre & pour les executer. Y a-t-il donc quelque inconvenient de penſer que le Créateur a ſoûmis ces deux cordons à la volonté, en les conſtruiſant capables de recevoir des eſprits ? Les Phyſiciens ſont réduits à l'égard des mouvemens volontaires qui s'executent par des muſcles de ſtructure ordinaire de recourir à la ſeule inſtitution du Créateur pour comprendre, autant qu'ils en ſont capables ; comment il ſe peut faire qu'une ame remue un corps, ce qui eſt encore plus difficile à concevoir, que de comprendre comment une ame peut être unie avec un corps. Sera-t-il donc plus difficile de reconnoître qu'une ame peut remuer un corps par un cordon de ſtructure convenable, qu'il n'eſt difficile de comprendre qu'elle le peut remuer par un muſcle de ſtructure ordinaire, en vertu d'une inſtitution toute-puiſſante, ſans laquelle on ne peut

entendre ni l'un ni l'autre, & par laquelle on entend également l'un & l'autre?

Les Phyſiciens qui regardent les brutes comme de pures machines, n'auroient nulle peine à admettre cette diviſion de muſcles ſanguins & muſcles ſpermatiques; car les mouvemens dits volontaires dans les bêtes ne s'executent ſelon cette opinion en conſéquence d'aucun ordre de volonté, mais ſeulement à l'occaſion des impulſions externes ſur les organes des ſens, d'où s'enſuivent neceſſairement & mechaniquement les mouvemens dits volontaires dans les brutes. Ces mouvemens volontaires ne ſont donc ſelon ces Phyſiciens en rien differens des mouvemens periſtaltiques des boyaux des brutes, ſinon que ces boyaux ſont eux-mêmes tout enſemble l'organe d'un ſens, c'eſt à dire, du toucher mechanique, en ce qui regarde leur œconomie & en même temps les organes du mouvement periſtaltique. Et ainſi les deux ſtructures dans les brutes ſont également des organes deſtinez à entrer en exercice dès qu'une impreſſion externe l'éxige.

Enfin ſi dans l'homme le cœur nous oblige de reconnoître au moins un muſcle ſanguin de ſtructure ordinaire abſolument indépendant de la volonté, ſans aucun inconvenient, pourquoi y auroit-il de l'inconvenient qu'il y eût un muſcle ſpermatique de ſtructure extraordinaire qui fût ſoûmis à la volonté? J'avoue que pour moi je n'y en vois aucun. Il y auroit un très-grand inconvenient à rendre l'homme maître abſolu des mouvemens vitaux du cœur par ſa ſeule volonté, ce qui ſeroit le rendre maître abſolu de ſa vie, & il y auroit un autre inconvenient très-conſiderable à ne le rendre pas maître des mou-

vemens neceſſaires pour la production de la voix & des tons qui ſont partie de la parole ; ce qui ſeroit le rendre incapable de la ſocieté. Or la ſocieté eſt abſolument neceſſaire à la vie humaine.

Je donne donc pour vrai & pour prouvé dans ce Supplément, ce que je n'ai avancé que comme probable dans le Memoire & dans les Notes. C'eſt à dire que les cordons de la glotte ſont de vrais muſcles quant à leur uſage, & conſéquemment des muſcles d'une ſtructure extraordinaire & ſinguliere dans l'homme.

VIII. ADDITION.

Ces cordons tendineux de la glotte ſurmontent ſans effort l'effort de pluſieurs grands muſcles & de l'air ſupprimé, non par leur propre force, mais par une adreſſe de mechanique naturelle, qui conſiſte toute, 1. *dans leur poſition,* 2. *dans la ſimplicité d'un ſphincter rectiligne.*

Avant que de quitter cet uſage de la glotte ſi oppoſé à la voix, puiſqu'il n'eſt établi que pour ſupprimer l'air, & cependant ſi propre à en démontrer l'organe ; je tâcherai de donner la ſolution d'une difficulté que *Galien* a propoſée ſans la réſoudre, s'étant contenté d'admirer ce qu'il auroit aiſément compris s'il avoit voulu faire uſage de la connoiſſance qu'il avoit de la Mechanique.

J'ai dit ſous le renvoi ci-deſſus que la ſuppreſſion de l'air eſt une action ſans comparaiſon plus forte que la voix, & cela eſt vrai ; car la clôture entiere ſuppoſe tous les degrez d'action neceſſaires pour le chant. Mais la ſuppreſſion

preſſion totale comprend actuellement outre tous les degrez neceſſaires pour le chant celui qui eſt neceſſaire pour la ſuppreſſion totale. *Galien* prouve la force de cette action par la force des muſcles du bas ventre, de ceux qui reſſerrent la poitrine, & de ceux qui remuent les bras dans les actions les plus fortes de tous ces muſcles, ou de la plûpart, comme dans l'éternuement, dans les plus preſſantes neceſſitez de vuider un ventre pareſſeux ou d'aſſener quelque coup de toute ſa force. Car dans toutes ces occaſions ſi importantes & ſi neceſſaires à la vie & à pluſieurs arts, ces deux petits cordons ſeuls joints enſemble, tiennent contre huit grands muſcles qui couvrent tout le ventre, quatre grands muſcles très-compoſez qui reſſerrent la poitrine, ſans compter les autres muſcles que pluſieurs Anatomiſtes croient non ſans quelque fondement capables de la même action, comme les intercoſtaux. *Galien* admire cette réſiſtance, & en effet elle eſt admirable : mais on y doit plus admirer la poſition que la force, car tout cela ſe fait ſans grand effort. En voici la preuve. Ces cordons de la glotte n'agiſſent que ſur le fondement que leur donnent les muſcles exterieurs du larynx anterieurs & poſterieurs, qui ne ſont que quatre, très-foibles par leur poſition, & par-là incapables de ſoûtenir la contraction de ces deux cordons ſi elle avoit une force conſiderable. La contraction de ces deux cordons tendineux eſt donc manifeſtement une action foible. Tout cela augmente de beaucoup la difficulté propoſée par *Galien*. Ce qui ſuit la pourra réſoudre.

Il faut rabattre de l'effort des huit muſcles du bas ventre bandez contre les muſcles de la glotte,

glotte, tantôt pour l'accouchement, tantôt pour l'évacuation d'un ventre pareſſeux, tout ce qui peut être ſoûtenu de cet effort par l'action du diaphragme bandé, qui en cette action eſt le principal antagoniſte de ces huit muſcles. Il eſt vrai que l'air reſpiré qui emplit la poitrine pour appuier l'action du diaphragme appuie ſa contraction, & l'appuie de plus en plus à meſure qu'il ſe rarefie de plus en plus en s'échauffant dans la poitrine où il eſt retenu. Il faut donc rabattre ſur l'effort du diaphragme contre les huit muſcles du bas ventre, tout ce que le volume & la rarefaction de l'air contenu dans les poûmons contribuent à la réſiſtance du diaphragme contre ces huit muſcles. Et il faut tenir compte aux deux petits cordons de la glotte de toute la part que le volume & la rarefaction de l'air contenu dans les poûmons contribuent à la réſiſtance du diaphragme ; car ce ſont eux ſeuls qui tiennent contre ce volume d'air qui a part à la réſiſtance du diaphragme. Or cette part n'eſt pas petite. Car il y faut ajoûter l'effort que les muſcles qui reſſerrent la poitrine font contre l'air qui la dilate, pour le reſſerrer de plus en plus à meſure qu'il ſe rarefie, & réunir tout ſon effort contre le diaphragme qui doit preſſer les boyaux de plus en plus pour concourir avec les huit muſcles du bas ventre à chaſſer ce qui charge & incommode le ventre dans les deux ſexes, & la matrice dans les accouchemens. Or cette action eſt ſi forte qu'elle va ſouvent juſqu'à jetter une partie des boyaux & même la matrice hors de la capacité du ventre, c'eſt à dire les boyaux dans les deux ſexes, & la matrice dans les femmes : les boyaux en forçant l'ouverture étroite & très-forte

des.

des muſcles obliques & tranſverſaux du bas ventre menagée dans les aponevroſes pour donner paſſage au cordon des vaiſſeaux ſpermatiques dans les hommes, & aux ligamens ronds dans les femmes: la matrice, malgré les fortes attaches qui devroient la retenir en ſa ſituation naturelle. Or le plus fort de cette action, qui eſt le dernier degré de cet effort, eſt tout entier de l'air rarefié preſſé par les côtes ſur le diaphragme; car le diaphragme contrebandé & retenu par le mediaſtin, ne peut par lui-même que commencer l'action en diminuant ſa vouture naturelle pour diminuer d'autant la capacité du ventre. Il faut donc reconnoître que le plus pénible de cet effort eſt réſervé aux deux foibles cordons de la glotte; car ce n'eſt que leur contact immédiat qui ſoûtient l'effort de l'air rarefié, preſſé par les muſcles intercoſtaux, par le diaphragme, & par tous les muſcles du ventre.

Cet effort paroît fort ſuperieur à la force de ces deux petits muſcles tendineux à n'en conſiderer que le volume & les fibres: mais ſi on en conſidere la ſituation & la direction, c'eſt toute autre choſe; car ils ſont poſez de ſorte que ſans effort ils peuvent ſoûtenir les plus grands efforts de tout ce grand nombre de grands muſcles dont j'ai fait mention. Voici comment.

Les liquides qui n'ont point de reſſort n'ont de force que ſelon leur poids, & leur poids n'agit que ſuivant leur hauteur. Les liquides qui ont reſſort agiſſent en tout ſens, dès que les cauſes de la rarefaction mettent leur reſſort en état d'agir: mais les uns & les autres agiſſent en ligne directe, les premiers de haut en bas ſelon le diametre & la hauteur de leur colomne, les ſeconds du centre à la circonference en tout ſens.

ſens. Or l'air eſt un des liquides capables de rarefaction.

Cela étant, l'effort de l'air retenu & rarefié dans la poitrine ſe doit partager ſur toutes les parties ſolides de la capacité de la poitrine qui en doivent ſoûtenir chacune leur part. La glotte ne doit ſoûtenir que la colomne où la baſe du cone qui convient au diametre du larynx en ſa partie ſuperieure, ou plûtot la colomne qui convient à ſon ouverture naturelle : car la partie ſolide de la glotte doit être en cela conſiderée, à peu près, comme le reſte de la circonference concave de la poitrine.

Ainſi ces deux petits muſcles ne ſe trouvent chargez que de repouſſer l'air qui porte contre cette ouverture, ou plûtôt celui qui porte contre le contact des deux levres jointes l'une à l'autre. Or elles ſont jointes l'une à l'autre par un contact immédiat. Cet effort ſe réduiroit donc preſqu'à rien, c'eſt à dire à l'exercice de la ſeule force neceſſaire pour contrebander les attaches du demi tympan de part & d'autre de l'ouverture juſqu'au point de rendre droite la ligne circulaire de chaque levre.

Il eſt vrai qu'une colomne d'air égale à la capacité du larynx fait quelque effort contre le tympan : mais c'eſt à peu près comme quelqu'un qui voudroit paſſer au travers d'une ouverture fermée par deux couliſſes, en pouſſant à plomb contre cette double couliſſe parfaitement jointe au milieu de cette ouverture, & bien arrêtée haut & bas. Car l'effort de l'air n'eſt que de bas en haut, & la force des levres & leur direction d'avant en arriere. De ſorte qu'au pis aller l'effort de l'air à l'égard des cordons tendineux ne peut être conſideré que comme deux

poids

poids égaux ſuſpendus chacun au milieu d'une corde de la longueur des deux muſcles tendineux qui conſtituent les deux levres de la glotte, chaque poids ſuſpendu a ſa corde bien arrêtée à ſes deux extrémitez. Or ces deux poids peſant à plomb ne tendroient nullement à écarter, mais ſeulement & au plus à cambrer & plier chaque corde également, & par conſéquent ſans préjudice de leur contact.

Ainſi l'air pouſſé directement de bas en haut ne tend qu'à ſoulever & ſeulement à proportion de ſon volume, & non à écarter. Il ne peut même ſoulever que fort peu les cordons tendineux, car il n'a de force ſur eux qu'autant qu'ils lui donnent de priſe. Or ils ne lui en peuvent donner qu'à proportion de leur diametre & de leur longueur, & tout cela eſt fort peu de choſe. Ils ſeront donc ſoulevez, ſi l'on veut, mais ſans préjudice de leur contiguité. La partie charnue & membraneuſe de chaque demi tympan prêtera beaucoup davantage à proportion de ſon étendue & de ſa conſiſtance, & ſoulagera d'autant les deux cordons.

Il n'y a donc pas lieu de s'étonner de la réſiſtance immenſe du bandement de ces petits muſcles à l'effort de l'air & de tant de grands muſcles. Ce n'eſt pas par une force extraordinaire, mais par l'application avantageuſe de leur peu de force qu'ils produiſent un ſi grand effet, jointe à la ſimplicité de leur ſtructure & de leur application mutuelle en ſphincter rectiligne, beaucoup plus exact pour la ſuppreſſion de l'air que les ſphincters circulaires. Ceux-ci ſont beaucoup plus aiſez à forcer ; car il n'eſt pas poſſible qu'ils ſuppriment l'air, qu'en accourciſſant leur diametre avec beaucoup d'effort. Or cela

ne

ne ſe peut que leur circonference ne ſoit extrémement froncée de pluſieurs plis tous fort ſerrez les uns contre les autres. Ce ſont donc autant d'ouvertures en rayon chacune capable d'être forcée dès que l'effort qui les ſerre diminuera, ſans compter qu'il eſt difficile que le centre mechanique de ces rayons ſoit réduit à un point indiviſible. Et il eſt impoſſible au contraire que ces deux lignes parfaitement droites appliquées l'une à l'autre dans toute leur longueur, faſſent entr'elles par un contact immédiat autre choſe qu'une ligne indiviſible. Ces plis froncez ſont donc dans les ſphincters circulaires pluſieurs échappées à garder avec autant d'efforts multipliez à proportion qu'il y a d'échappées, au lieu qu'un ſphincter rectiligne comme celui de la glotte demande d'autant moins d'effort que la ſeule juſteſſe de l'application ſuffit pour la ſuppreſſion totale. Je ne ſai ſi je me trompe, mais il me ſemble qu'on pourroit calculer cette difference entre les ſphincters rectilignes & les circulaires par la proportion du diametre à la circonference, plus au nombre & à l'étendue d'autant de rayons qu'il peut y avoir de plis dans les ſphincters circulaires.

IX. ADDITION.

Conſideration ſur un prétendu fait allegué par Galien *pour preuve de la clôture exacte de la Glotte, dont l'exactitude n'a nul beſoin d'être prouvée.*

Galien donne pour preuve de l'exactitude de la ſuppreſſion de l'air par l'action de ces deux muſcles, un fait dont la verité me paroît fort ſuſpecte,

pecte, quoiqu'il ſoit confirmé par pluſieurs Relations modernes de Voyageurs. Le fait prétendu eſt que pluſieurs Eſclaves au deſeſpoir, privez par leur état & par la précaution de leurs maîtres de tout moien de s'échaper & de ſe tuer, ſe ſont aviſez de s'étouffer par la ſeule action de ces muſcles, opiniâtrée juſqu'à cet étrange effet. Voilà ce que *Galien* ſuppoſe, peut-être pour l'avoir ouï dire & l'avoir crû ſans preuve, & ſans approfondir la verité ou l'impoſſibilité du fait.

Les raiſons que je crois avoir d'en douter m'ont porté à m'en informer plus particulierement, & j'en ai trouvé l'occaſion par le retour du * Directeur général de la Compagnie du *Senegal*. Il m'a confirmé le fait, & ſur mes difficultez il a fait intervenir dans nôtre converſation un des principaux Commis ‡ chargé du ſoin des Negres vendus, & des embarquemens pour l'*Amerique*. Ce premier Commis a été autrefois Chirurgien.

Celui-ci m'a aſſuré qu'il avoit vû deux faits de cette eſpece. L'un de ces faits fut d'un jeune Negre de 14 ou 15 ans, qu'il fut contraint de faire embarquer les fers aux pieds & aux mains, ſe défiant de lui parcequ'il ne l'avoit jamais pû apprivoiſer, quelque bon traitement qu'il lui eût fait pour le deſabuſer de l'opinion qu'ils ont tous qu'on ne les tranſporte en *Amerique* que pour les y manger. Demi-quart-d'heure après l'embarquement on vint dire au Commis que le jeune Negre étoit mort. L'autre étoit un Negre de 27 ou 28 ans qui mourut de la même maniere, étant aſſis à la vûë de pluſieurs perſonnes qui ne penſoient à rien de ſemblable. Je lui

* M. *Bru*. ‡ M. *Caſtain*.

lui demandai la cauſe de ces étouffemens volontaires prétendus, il me dit que c'étoit la langue ramenée vers la gorge & appliquée ſur le conduit de la reſpiration. Je ſoûtins l'impoſſibilité de cette application, & lui voulois faire ſoupçonner quelque poiſon. Il repliqua que ces Negres étoient nuds comme la main, & qu'on les viſitoit par tout avant l'embarquement, & ſur tout avant le débarquement, parce qu'alors leurs fraieurs redoublent.

Il ne paroît ſur le corps de ces miſerables aucune marque de violence, ils ne jettent du ſang par aucun endroit, on n'a pas eu la curioſité de les ouvrir. On m'a promis de le faire à la premiere occaſion, & de m'en envoyer une relation exacte ſuivant le Memoire que je dois donner pour cet effet.

J'avoue que j'ignore la cauſe de ces morts volontaires; mais je crois être aſſuré que ce n'eſt l'effet d'aucun mouvement volontaire, quel qu'il puiſſe être, ſoit de la langue, ſoit des levres de la glotte. Aucun mouvement volontaire, quel qu'opiniâtre qu'il puiſſe être, ne peut être pouſſé que juſqu'à perte de connoiſſance; & dès qu'on en eſt venu-là, le mouvement machinal de la reſpiration, tel qu'il s'exerce dans un profond ſommeil indépendamment de la volonté, recommence ſans attendre l'ordre de la volonté, reprend peu à peu ſon train ordinaire. De ſorte que tout ce que la volonté peut faire en ceci, ſeroit de ſuſpendre la reſpiration juſqu'à perte de connoiſſance, & de donner par-là lieu à des retours alternatifs, qui donnant autant de fois lieu de ſe repentir d'une extravagance ſi outrée & ſi oppoſée à l'inclination naturelle de ſe conſerver, préviendroient une déciſion finale dans

dans tous les corps dont les vaiſſeaux ne ſeroient pas pleins à crever. La promptitude de ces morts ſans retour ne s'accorde pas avec ſemblables alternatives. Et d'ailleurs on ne voit pas que les Plongeurs de profeſſion meurent dans cet exercice de reſpiration ſupprimée, à moins qu'il ne leur arrive ſous l'eau quelque accident du dehors ou du dedans qui les empêche de prendre le haut pour reprendre haleine. Je ne puis donc croire cette cauſe ; & comme ſemblables morts ſont rares, puiſqu'un Commis appliqué depuis 17 ans au ſoin de ces Eſclaves n'en a que deux exemples en une ſi longue ſuite de temps. J'aime mieux avouer mon ignorance, ou attribuer ſemblables morts aux cas imprévûs des morts ſubites par differentes cauſes, ou à la fraieur d'un homme qui croit n'être embarqué ou ne débarquer que pour être égorgé par un Boucher, & ſon corps débité par quartiers dès qu'il ſera à terre au lieu de ſa deſtination.

Voila les IX Additions que je me ſuis propoſées pour la premiere Partie de ce Supplément au Memoire ſur la Voix. J'eſpere donner dans la ſeconde Partie de nouvelles preuves des principes du même Memoire.

QUE

QUE LES PLANTES

Contiennent réellement du fer, & que ce métal entre neceſſairement dans leur compoſition naturelle.

PAR M. LEMERY le fils.

* IL y a quelque temps que M. *Geoffroi* fit part à l'Academie d'une découverte fort curieuſe qu'il avoit faite ſur un grand nombre de cendres de differentes Plantes : Il nous dit qu'il n'en avoit trouvé aucune où il n'y eût des grains capables d'être attirez par l'aimant. Mon Pere a fait voir depuis à la Compagnie que dans les cendres mêmes reſtées dans la cornue après la diſtillation du miel, on trouvoit auſſi de ſemblables grains, & j'en ai trouvé juſques dans les cendres du Caſtoreum.

Quoique ces grains ſoient auſſi facilement attirez par l'aimant que des grains de fer de même volume, n'y a-t-il point lieu de ſoupçonner que ces grains ſoient une matiere differente du fer, & neanmoins auſſi propre que le fer même à être attirée par l'aimant ? Ou ſi l'on prouve que ces grains ne peuvent être autre choſe qu'un fer veritable, ou une matiere de même nature que celle de l'aimant, cette matiere n'a-t-elle point été formée pendant que la plante a été brûlée & réduite en cendres ? ou n'étoit-elle point déja dans la plante ? & n'y eſt-

* 13. Novembre, 1706.

elle point montée avec les ſucs qui ont ſervi à nourrir & à faire vegeter la plante pendant qu'elle étoit ſur la terre ? Voilà, à mon avis, les doutes les plus raiſonnables qu'on puiſſe avoir ſur la nature & la formation de cette matiere ſurprenante. Je vais tâcher de les éclaircir le plus ſuccinctement que je pourrai.

Il me ſeroit aiſé de prouver par pluſieurs experiences que la matiere qui ſe trouve dans les cendres eſt un veritable fer ou aimant ; mais je m'en tiens à une ſeule expérience qui me paroît ſuffiſante pour cela. J'ai expoſé la matiere en queſtion au verre ardent de Monſeigneur le Duc d'*Orleans* : elle s'y eſt fondue de la même maniere & avec les mêmes circonſtances que le fer ou l'aimant, c'eſt à dire en petillant ou étincellant beaucoup, & après la fuſion elle s'eſt réduite en une boule métallique comme fait la limaille de fer, ou la poudre d'aimant expoſez au même verre ardent.

Puis donc que cette matiere eſt un veritable fer ou aimant, par quel hazard s'eſt-elle rencontrée dans les cendres ? & que croire de ſa formation ? La principale raiſon qu'on allegue pour prouver que cette matiere a été formée dans le temps que le feu a brûlé & calciné la plante, c'eſt qu'on ne conçoit pas aiſément comment des parties auſſi groſſieres que celles du fer auroient pû monter & ſe diſtribuer dans tous les vaiſſeaux d'une plante, paſſer juſques dans les tuyaux des fleurs qui doivent être d'une très-grande ſubtilité, être recueillies par les abeilles, & ſe retrouver enfin après la diſtillation du miel, qui comme tout le monde ſait n'eſt qu'un compoſé des parties les plus ſubtiles des fleurs ; mais cette objection diſparoî-

roîtra peut-être par le raiſonnement & les experiences ſuivantes.

Premierement le fer eſt un métal ſi commun, du moins dans nos païs, que je poſe en fait qu'il n'y a point de terre où l'on n'en trouve. En ſecond lieu ce métal ſe diſſout avec la derniere facilité par toutes ſortes de ſels, & prend differentes formes ſuivant la nature des ſels qui ont ſervi à le diſſoudre. Quand il rencontre dans la terre des acides ſemblables à ceux de l'eſprit de ſoufre, de l'eſprit d'alun & de l'eſprit de vitriol, il s'y réduit en un veritable ſel concret que nous appellons vitriol. Pourquoi, par exemple, ce ſel dont la baſe eſt du fer, comme je l'ai démontré dans un autre Memoire : ce ſel, dis-je, réſous dans une quantité ſuffiſante d'eau, ne pourra-t-il pas ſe diſtribuer dans toute la plante ? Eſt-ce parceque l'embouchure de ſes tuyaux eſt fort petite, & qu'on ne croit pas que ce ſel ſoit diviſible en d'aſſez petites parties pour enfiler des routes auſſi étroites ? On reviendra de ce préjugé ſi l'on conſidere qu'un ſeul grain de vitriol diſſous dans neuf mil deux cens-ſeize grains d'eau commune, teint ſenſiblement de ſa couleur toute cette quantité d'eau, & lui donne en même temps un goût aſſez conſiderable de fer ou de vitriol ; car en ce cas il faut que le fer ait été diviſé en des parties bien petites & bien ſubtiles pour communiquer ſon goût, & une couleur ſenſible à un ſi grand nombre de particules d'eau. Cette diviſibilité du fer ou du vitriol me paroît plus que ſuffiſante pour le rendre capable de pénétrer dans les tuyaux des plantes les plus déliez.

On objectera peut-être que ſi le fer peut prendre

dre une forme assez petite pour passer par les filets les plus déliez des racines des plantes, il conserve toûjours sa pesanteur spécifique qui le rendra éternellement incapable de s'élever plus avant dans la plante, & de monter jusques dans les fleurs.

Je réponds premierement que si l'on dissout dans de l'eau commune autant de vitriol qu'elle en peut contenir, & qu'on tire ensuite par un siphon cette eau chargée de fer ou de vitriol, elle montera aussi bien malgré son nouveau poids, que si elle n'eut point contenu de fer ou de vitriol. Pourquoi donc le fer ne pourra-t-il pas monter de même dans les tuyaux de la plante qui peuvent être regardez comme des especes de siphons?

Mais si l'on veut encore une nouvelle preuve que la pesanteur spécifique du fer ne peut jamais être un obstacle à son élevation dans les plus petits tuyaux des plantes, on n'a qu'à considerer que le principe le plus fixe & le plus grossier, savoir la terre qui comme tout le monde sait, résiste à une violence de feu très-considerable, ne laisse pas de s'insinuer par le cours de la circulation dans le tissu même des fleurs; car on en trouve toûjours dans leur analyse: pourquoi donc le fer réduit en sel par des acides ne montera-t il pas dans les fleurs? Et cela d'autant mieux que ce sel s'éleve & se sublime de lui-même avec la derniere facilité.

Je prouve la facilité qu'il a à s'élever, 1°. Parceque quand on met dans une même boëte du vitriol blanc, du vitriol verd, & du vitriol bleu sans les couvrir séparément, les parties qui s'exhalent naturellement de chacun d'eux, & qui retombent ensuite confusément sur ces vi-

vitriols, changent tellement leur couleur, que le vitriol blanc devient gris blanc, le vitriol verd d'un gris plus foncé, le vitriol d'*Allemagne* qui eſt bleuâtre devient gris brun & jaunâtre en quelques endroits, & enfin le vitriol de *Chypre* qui eſt fort bleu devient d'un bleu tirant ſur le gris. Il eſt encore à remarquer que ces vitriols ne changent point de couleur dans leur ſurface inferieure qui eſt appliquée contre la boete, mais ſeulement dans leur ſurface ſuperieure qui peut recevoir les differentes parties qui s'élevent de tous ces vitriols, & qui retombent enſuite indifferemment ſur chacun d'eux.

2°. Si l'on met dans un pot du vitriol & qu'on l'humecte avec un peu d'eau, on verra quelque temps après le fer chargé d'acides monter de lui-même juſqu'au haut des parois du pot, & quelquefois même retomber en dehors & fort bas contre ces mêmes parois. Cette eſpece de ſublimation naturelle du fer prouve aſſez la facilité qu'il a à s'élever quand il a été pénétré par des acides; mais voici une experience nouvelle qui la prouve encore infiniment mieux qu'aucune autre.

Quand on verſe de l'eſprit de nitre ſur de la limaille de fer, on ſait qu'il ſe fait un bouillonnement violent & accompagné d'une chaleur ſi forte, qu'il n'eſt preſque pas poſſible de tenir la main ſur le vaiſſeau. Après le bouillonnement la liqueur devient rouge & chargée, à cauſe du fer qui y a été diſſous. J'ai jetté de l'huile de tartre par défaillance ſur cette diſſolution de fer, il s'eſt fait une fermentation mediocre, pendant laquelle la liqueur s'eſt fort gonflée: je l'ai laiſſé repoſer, & peu de temps après il s'eſt formé aux parois du vaiſſeau quan-

tité de petits branchages fort diſtincts, qui s'élevant toûjours de la liqueur ſans qu'il y eût de fermentation apparente dans cette liqueur, & augmentant continuellement, ont bien-tôt gagné le haut du vaiſſeau, & ſont même retombez au dehors en ſi grande quantité qu'ils couvroient la ſurface interne & externe du vaiſſeau. On pourroit donner le nom d'arbre de fer ou de Mars à cette eſpece de vegetation Chimique. Cette experience m'aiant paru curieuſe, je l'ai répétée un très-grand nombre de fois, tantôt augmentant, tantôt diminuant la doſe de l'huile de tartre, & il s'eſt toûjours fait differentes ſortes de vegetations qui quelquefois ne reſſembloient qu'à de purs branchages: ſouvent ces branchages étoient garnis comme de feuilles, & portoient en haut comme des fruits ou des fleurs, & à l'extrémité d'embas ou des petits filets qui imitoient parfaitement la figure de ceux des racines, ou des tuyaux veritablement creux qui partoient du fond du vaiſſeau, & qui communiquoient au haut où étoit le fort de la vegetation. Enfin il m'eſt ſouvent arrivé de faire un mêlange ſi exact d'huile de tartre par défaillance, & de la diſſolution de fer dont il a été parlé, que la liqueur après avoir ſuffiſamment fermenté, & avoir enſuite repoſé dans le verre pendant quelques heures, ſans produire aucune apparence de vegetation bien conſiderable, elle devint tout d'un coup d'une volatilité ſurprenante; car elle s'éleva en fort peu de temps au haut du verre, & une partie de cette liqueur s'y condenſa ſous la figure de fleurs parfaitement bien formées, tandis que l'autre coula en dehors où elle produiſit de pareilles fleurs, & enfin le ſurplus de la liqueur tom-

tomba par terre ; de ſorte que je fus obligé de mettre au plutôt une petite écuelle ſous le verre qui reſta bien-tôt ſans liqueur. Je remis dans le verre la liqueur qui étoit tombée dans l'écuelle, mais elle ne demeura pas long-temps en place, & retomba de nouveau dans l'écuelle, augmentant toûjours en paſſant la vegetation qu'elle avoit commencée. Je remis encore la liqueur dans le verre, & je continuai un grand nombre de fois le même manege juſqu'à ce que toute cette liqueur ſe fût corporifiée, & eût été emploiée à couvrir de branchages & de fleurs la ſurface interne & externe du verre, & même une bonne partie de l'écuelle où elle s'étoit répandue tant de fois; ce qui fit un ſpectacle fort agreable à la vûe.

Je ne donne point ici un détail bien circonſtancié de toutes les obſervations que j'ai faites ſur cette operation, parceque je craindrois d'être long & de faire perdre de vûe le ſujet principal pour lequel j'ai rapporté cette experience particuliere. Je réſerve ce détail pour un Supplément à ce Memoire-ci, que je donnerai dans une autre Aſſemblée. Je dirai ſeulement en paſſant que c'eſt le fer qui donne dans ce cas-ci toute la force & la volatilité à la liqueur dont il a été parlé, & que ſans le mêlange de ce métal cette liqueur, qui n'eſt à proprement parler qu'un veritable nitre fondu dans une certaine quantité d'eau, ne produiroit tout au plus au fond du verre que quelques cryſtaux ſemblables à ceux qu'on fait tous les jours quand on purifie le nitre commun.

Toutes les experiences qui ont été rapportées dans ce Memoire, prouvent que le fer diſſous par des acides peut être aiſément réduit en des

particules assez petites & d'une assez grande legereté pour pouvoir pénétrer les tuyaux les plus petits & les plus élevez des plantes. Concluons donc que le fer qui se trouve dans les cendres des plantes, étoit dans ces mêmes plantes avant qu'elles eussent été brûlées ; & en effet le fer étant répandu en abondance dans toute sorte de terres, & pouvant être aisément dissous par les premieres liqueurs salines qui l'arrosent, comme il a déja été dit ; ces liqueurs montant ensuite par la chaleur du Soleil dans les tuyaux des plantes pour les nourrir & les faire croître ; ces liqueurs, dis-je, portent naturellement avec elles le fer dont elles se sont chargées. Ces raisons une fois conçûes, il y auroit bien plus de lieu d'être surpris si l'on ne trouvoit point de fer dans les plantes, que l'on ne doit être étonné d'en trouver.

On pourroit même dire avec quelque vraisemblance, que non seulement le fer est réellement existant dans les plantes, mais qu'il leur est peut-être encore plus necessaire qu'on ne pense ; car comme ce métal suffisamment attenué par des acides acquiert une force & une volatilité surprenante, qu'il prend avec la derniere facilité la figure de branchages, & qu'il produit un grand nombre de differentes sortes de vegetations ; ne pourroit-il pas servir par tout le mouvement & toutes les figures dont il est susceptible, à étendre puissamment & de la maniere la plus convenable les petits tuyaux des plantes où il se rencontre, & contribuer par-là beaucoup à la vegetation de ces mêmes plantes ? Enfin comme le fer se peut rencontrer plus ou moins abondamment dans certaines plantes que dans d'autres, & s'unir dans les unes à de certains sels,

ſels, & dans d'autres à des ſels d'une autre nature; ce métal contribue peut-être encore beaucoup par-là aux differentes qualitez & vertus medicinales des plantes.

Il ne me reſte plus qu'à expliquer pourquoi les plantes dans leur entier ne donnent aucun goût ni aucune marque de fer. C'eſt que le fer s'y trouve en petite quantité par rapport aux parties huileuſes, ſalines, aqueuſes & terreuſes qui l'envelopent, & qui le cachent de maniere qu'il n'eſt plus reconnoiſſable en cet état. Mais quand la plante a été brûlée & réduite en cendres, & que l'on a eu ſoin de bien laver ces cendres pour en emporter les ſels fixes, les grains ferrugineux dégagez alors de leurs envelopes qui empêchoient l'aimant d'y produire aucun effet, reprennent leur premiere qualité, & ſont enſuite facilement attirez par l'aimant, ou par une lame d'acier aimantée; de même que le vitriol pouſſé par un grand feu ſe réduit par la perte de ſes acides en une matiere qui recommence à pouvoir être attirée par l'aimant, & qui certainement avoit ſervi de baſe à la formation du vitriol, comme je l'ai démontré dans un autre Memoire. On pourroit encore ajoûter que comme le fer qui a ſervi à faire du vitriol, & qui a été enſuite revivifié par la violence du feu, a perdu pendant cette operation un aſſez grand nombre de parties huileuſes, pour être devenu ſenſiblement different de ce qu'il étoit auparavant par raport aux experiences Chimiques; le fer qui eſt entré dans la compoſition des plantes ſouffre auſſi une alteration pareille par la calcination, & devient une matiere plus ſemblable par ſa nature à la matiere propre de l'aimant qu'à celle du fer.

Je répondrai dans le Tome de 1707 à une objection contre ce Memoire-ci, qui m'a été faite dans une Aſſemblée particuliere de l'Academie. Je renvoie cette réponſe à un autre Memoire, parcequ'elle demande pluſieurs experiences nouvelles dont le détail la rend un peu longue.

OBSERVATIONS SUR DEUX ENFANS JOINTS ENSEMBLE.

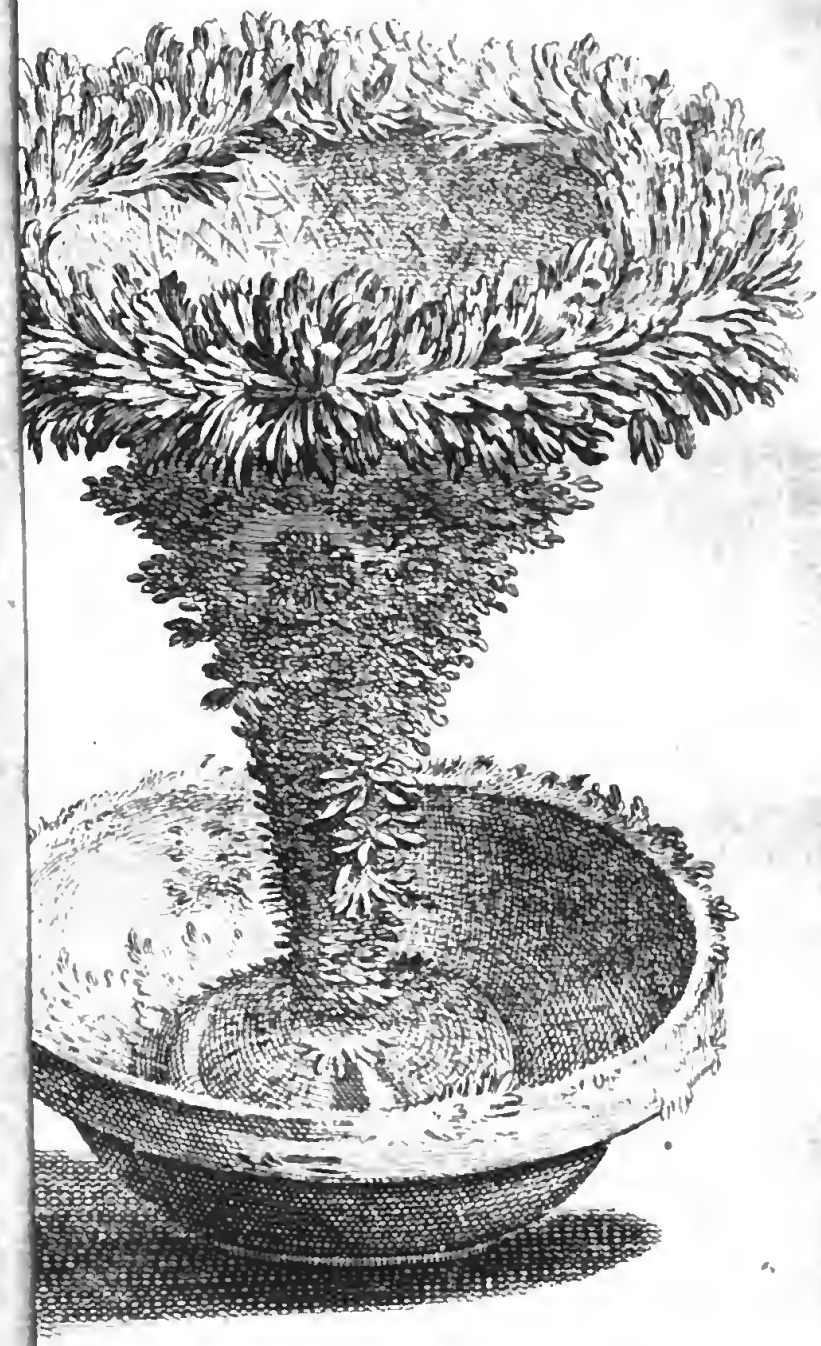
PAR M. DU VERNEY l'aîné.

* LE dix-neuviéme du mois de Septembre de l'année 1706, *Catherine Feuillet* femme de *Michel Alibert* Jardinier du Village de *Vitry* près *Paris*, accoucha de deux Enfans mâles joints enſemble par la partie inferieure du ventre. C'étoit ſa ſixiéme groſſeſſe, & elle entroit dans ſon neuviéme mois quand elle accoucha.

Il lui eſt arrivé ce qui eſt ordinaire à toutes les femmes qui ſont groſſes de deux Enfans, qui eſt d'être plus incommodée que dans les autres groſſeſſes, d'avoir le ventre fort gros & fort tendu, & des varices aux jambes.

Le travail ne fut ni trop long ni trop penible, parceque l'un de ces Enfans ſe preſenta dans la ſituation naturelle; & que la Sage-femme, qui dans cette occaſion fit connoître qu'elle eſt habile dans ſon art, aiant reconnu par les tentatives qu'elle avoit faites, qu'il y avoit quelque

* 13 Novembre 1706.



tre vegetation plus belle et plus distincte qui s'eſt
p moins de tems que la premiere et qui a cou-
et le dehors du verre et même une bonne par-
ſſeau qu'on a été obligé de mettre dessous.

BIBLIOTECA NAZIONALE

que obſtacle qui empêchoit l'Enfant de ſortir, & examinant d'où cela pouvoit venir, s'apperçût que ſa poitrine étoit embraſſée par les jambes d'un ſecond Enfant, qu'elle croioit être ſéparé du premier ; ce qui l'obligea de faire de nouvelles tentatives pour tirer celui qui ſe preſentoit au paſſage : mais ces tentatives furent inutiles ; c'eſt-pourquoi elle réſolut ſur le champ de tirer dehors les deux pieds du ſecond Enfant, & d'achever ſon operation, comme ſi elle n'eût eu à en tirer qu'un ſeul qui ſe ſeroit preſenté par les pieds, ce qui réuſſit fort heureuſement.

Le délivre étoit compoſé d'un ſeul cordon & d'un ſeul *placenta*, & ces Jumeaux étoient renfermez ſous les mêmes membranes. Le *placenta* étoit plus grand & plus épais qu'à l'ordinaire, les envelopes plus fortes & plus épaiſſes, & le cordon plus gros.

Ces Enfans étoient fort vifs, ils ont vêcu depuis le 19 Septembre juſqu'au 26, & pendant ce temps-là ils ont fait leurs fonctions naturelles autant que la ſituation où on les mettoit a pû le permettre.

Celui qui paroiſſoit le plus fort mourut à quatre heures du matin, & l'autre trois heures après.

On peut penſer que trois choſes ont contribué à leur mort. La premiere eſt la mauvaiſe ſituation qu'on leur donnoit en les emmaillottant à l'ordinaire, ce qui a comprimé la partie du bas ventre qui leur étoit commune, & les conduits par où les excremens devoient ſortir, comme on le prouvera dans la ſuite.

La ſeconde, parcequ'ils n'ont jamais tetté, & qu'on ne les a nourris que de lait de Vache lequel s'eſt caillé dans l'eſtomac & dans les in-

teſtins qui en étoient remplis, comme je l'ai reconnu en les ouvrant.

La troiſiéme, parcequ'on les découvroit trop ſouvent, pour ſatifaire la curioſité de pluſieurs perſonnes, & qu'à chaque fois on les tournoit en divers ſens.

Ces Enfans joints enſemble, comme on les voit dans la premiere Figure, avoient 22 pouces de long. Il ſeroit inutile de décrire tout ce qui ſe preſente depuis la tête juſqu'à la partie moienne de leurs ventres, parceque toutes ces parties ont leur conformation ordinaire: mais la partie moienne du ventre, qu'on nomme communément ombilicale, n'avoit point de nombril; & au lieu que ces Jumeaux en devoient avoir chacun un, il n'y en avoit qu'un ſeul pour tous les deux, dont on marquera la ſituation.

Le bas du ventre, qu'on nomme communément l'Hypograſtre, eſt tout ce qu'il y a de ſingulier.

Dans la conformation naturelle des autres enfans, les os Pubis en ſe joignant font une eſpece de cintre, qui termine le bas de la partie anterieure du ventre; & par leur jonction avec les os des Iles & les Iſchions qui s'uniſſent avec l'os ſacrum, ils forment tous enſemble la cavité qu'on nomme le baſſin.

Dans ces Jumeaux il n'y avoit point de Pubis; mais les os qui euſſent dû le compoſer par leur jonction, étoient ſeparez & placez vers les aînes; l'os pubis droit d'un de ces Jumeaux au lieu de ſe joindre avec l'os pubis gauche du même ſujet, rencontroit l'os pubis gauche de l'autre, auquel il s'uniſſoit par un ligament très-fort & très-ſouple, & les deux fai-

faiſoient en cet endroit une eſpece de cintre.

Ces ligamens qui joignoient les os pubis de chaque côté n'avoient chacun qu'environ 2 lignes de long, & faiſoient une eſpece d'articulation aiſée & commode, qui permettoit à ces Enfans d'approcher & d'éloigner réciproquement les troncs de leur corps juſqu'à un certain point.

On voyoit encore un ligament très-fort & très-épais, qui allant d'un côté à l'autre s'implanter dans la partie inferieure de la jonction des os pubis, diviſoit en quelque maniere le baſſin commun en deux parties. Ce ligament avoit la figure d'un cintre renverſé, & la peau qui joignoit les deux derrieres de ces Enfans y étoit étroitement colée. Les os des Iles étoient plus plats qu'à l'ordinaire, tournez en arriere, & poſez preſque ſur le même plan. Les Iſchions étoient auſſi tournez en arriere; les os ſacrum moins convexes & plus recouverts des os des Iles. Les coccyx plus raccourcis, & leur pointe étoit un peu de côté.

Par cet arrangement les trous qu'on nomme ovales ſe trouvoient ſur les côtez & l'un vis à vis de l'autre, & la boete des hanches étoit fort tournée en arriere; ainſi les cuiſſes étoient tellement articulées que la pointe des pieds étoit entierement en dehors.

On découvre aiſément la conformation & la ſituation extraordinaire de ces os dans la troiſiéme Figure; & il eſt neceſſaire de la conſulter: on doit pareillement jetter les yeux ſur les autres Figures avant que de lire le reſte de la deſcription.

Le nombril commun aux deux Enfans étoit

préciſément au milieu de la partie la plus baſſe du ventre, laquelle leur étoit auſſi commune; & en cet endroit le ventre étoit auſſi un peu plus étroit, & la peau qui le recouvroit étoit plus ferme, étant fortifiée par pluſieurs fibres tendineuſes; on y diſtinguoit même comme une eſpece de coûture qui marquoit le lieu où la peau des ventres de ces enfans s'uniſſoit. Cette peau alloit d'un des côtez de la jonction des os pubis juſqu'à l'autre, en faiſant une eſpece de cintre oppoſé à celui de deſſous.

On a déja vû quelques monſtres de cette nature. *Paré* dans ſes Oeuvres de Chirurgie, donne la figure de deux Jumeaux preſque ſemblables nez à *Paris* en mil cinq cens ſoixante & dix: mais au lieu que nos deux Enfans étoient tous deux mâles, *Paré* rapporte que les Chirurgiens jugerent que l'un des deux dont il parle étoit mâle, & l'autre femelle; ce que l'on ne peut connoître par la Figure qu'il en a donnée, parce qu'elle les repréſente ſeulement couchez ſur le dos.

Dans la ſeconde Figure qui repréſente les Enfans dont je parle ici, couchez ſur le ventre, tout eſt ſemblable à ce que l'on voit dans les autres enfans: mais les os des Iles étant plus ſerrez contre l'os ſacrum, comme il a été dit, font que le derriere de chaque Enfant eſt plus plat & plus étroit.

Ces Enfans n'avoient point d'anus, & de l'endroit où il eſt ordinairement on voyoit ſortir les verges, dont l'une étoit tournée d'un côté & l'autre de l'autre.

A chaque côté de ces parties on voyoit un repli de peau qui repréſentoit aſſez bien la moitié d'un ſcrotum vuide & applati.

* Ces

* Ces Enfans étant couchez ſur le ventre, les deux verges paroiſſoient ſituées d'une maniere biſarre, quoiqu'en effet elles fuſſent ſimplement abaiſſées & tournées vers le croupion.

En faiſant la diſſection de ce Monſtre, la premiere choſe qui me parut meriter quelque attention, fut la diſpoſition des muſcles droits; cas dans l'état naturel ils vont droit du ſternum par la partie anterieure du ventre s'inſerer aux os pubis : mais dans ces Jumeaux, après être parvenus vers la partie moienne du ventre, ils ſe détournent vers les côtez pour s'inſerer aux os pubis qui ſont leur appui naturel & qui y ſont placez. Par ce moien il reſtoit un eſpace à peu près de la figure d'un lozange qui étoit rempli par les aponevroſes des autres muſcles du bas ventre. Le nombril étoit placé au milieu de cet eſpace, le cordon qui en ſortoit étoit plus gros qu'à l'ordinaire, & compoſé d'un plus grand nombre de vaiſſeaux, † comme nous l'expliquerons dans la ſuite.

Comme les parties externes étoient ſemblables à celles des autres enfans depuis la tête juſqu'à la partie baſſe du ventre, les parties internes l'étoient auſſi ; le Foye, la Ratte, le Pancreas, l'Eſtomac & le canal des inteſtins grêles, tout y étoit ſemblable aux mêmes parties des autres ſujets ; mais les inteſtins grêles de chacun de ces Jumeaux venoient par leurs extrémitez s'ouvrir dans un inteſtin commun, qui à l'un de ſes côtez avoit un petit cœcum garni d'une appendice ſans iſſue; & la rencontre de ces trois inteſtins ſe faiſoit vers un des côtez où les os pubis ſe joignoient.

Cet inteſtin commun doit être regardé comme

* *Voyez la 3. Figure.* † *Voyez la 1. Figure.*

me un Colon, tant par rapport à ſon diametre qu'à la forme de ſon appendice. Il étoit neanmoins garni de feuillets ſemblables à ceux des inteſtins grêles; il étoit un peu évaſé à ſa naiſſance, & peu après il faiſoit deux plis en ſe tournant d'abord vers l'os ſacrum, puis il venoit s'ouvrir dans un autre inteſtin qui avoit de chaque côté un cœcum garni de ſon appendice aveugle. Ce ſecond inteſtin, qu'on peut nommer un ſecond Colon, faiſoit d'abord un long repli en allant ſous les inteſtins grêles de l'un de ces deux Enfans; puis revenant, il faiſoit un autre repli, mais plus petit, ſous les inteſtins grêles de l'autre enfant, & enfin il alloit s'inſerer dans une eſpece de ſac commun à ces Jumeaux. Ce dernier colon qui étoit ſans cellules & ſans feuillets, avoit un pouce de diametre ſur neuf de long; & le premier colon qui paroiſſoit y être enté, avoit un pouce de diametre ſur ſix de long.

Les inteſtins grêles avoient dans chaque Enfant leur mezentere & leurs vaiſſeaux particuliers; mais le colon étoit attaché de chaque côté dans toute ſa longueur par un prolongement du mezentere de chacun de ces Jumeaux: ainſi les vaiſſeaux dont il étoit arroſé étoient communs aux deux Enfans, & outre les vaiſſeaux qu'il recevoit de l'artere qu'on nomme Mezenterique ſuperieure, il en recevoit auſſi de la Mezenterique inferieure, & la veine qui en rapportoit le ſang ſe déchargeoit dans la veine cave au-deſſous des Emulgentes. On voit par cette deſcription que la jonction de ces Freres étoit fort étroite, puiſqu'elle étoit formée non ſeulement par les parties ſolides & molles, mais encore par le cours des liqueurs.

Le

Le ſac où s'ouvre l'inteſtin dont on a parlé, paroiſſoit compoſé de deux veſſies applaties & jointes l'un à l'autre par le côté & ſans cloiſon; de ſorte, qu'il n'y avoit à proprement parler qu'une cavité. Ces veſſies n'étoient pas unies ſuivant toute leur longueur; car par enhaut il s'en falloit environ trois lignes que la jonction n'allât juſqu'au ſommet, qu'on nomme ordinairement le fond, & par embas il y avoit environ un demi-pouce de ſeparation : dans cet endroit le ligament qui ſeparoit les deux baſſins ſupportoit cette veſſie qu'on peut nommer jumelle, & la partie de cette double veſſie particuliere à chacun de ces Enfans étoit ſituée dans la cavité du baſſin qui lui répondoit, & qui étoit propre à cet Enfant; mais elle n'occupoit pas cette cavité toute entiere, parce que quelques contours du colon en occupoient une partie.

Les Ureteres s'ouvroient preſque à l'ordinaire dans chaque veſſie, dont la tunique charnue étoit fort épaiſſe, & compoſée d'un double plan de fibres qui ſe croiſoient, & dont pluſieurs paſſoient obliquement d'une veſſie à l'autre en ſe croiſant.

Il y avoit dans chacun de ces Jumeaux à chaque côté du ligament qui ſeparoit les deux baſſins, deux gros trouſſeaux de fibres qui alloient s'épanouïr ſur les côtez de chaque veſſie, dont la tunique interieure étoit un peu goderonnée, épaiſſe, & comme calleuſe.

L'extrémité de l'inteſtin s'appliquoit obliquement ſur un des côtez de cette veſſie, l'embouchure en étoit fort étroite par rapport à ſon diametre, & elle ne ſe trouvoit qu'à l'un des côtez de l'extrémité de l'inteſtin, l'autre côté fai-

faiſant une eſpece de ſac aveugle. La plus grande partie de cette ouverture répondoit à l'une des veſſies ; la plus petite avoit ſa direction vers l'autre veſſie : de maniere qu'il ſemble que l'un étoit compenſé par l'autre pour diſtribuer également les matieres dans les deux veſſies. Il y avoit auſſi ſur cette veſſie un petit ſac aveugle qui communiquoit avec l'embouchure de l'inteſtin.

Dans les Enfans d'une ſtructure ordinaire la veſſie a la figure d'une poire ; ce qui fait qu'on y diſtingue un fond & un col, lequel diminuant inſenſiblement, s'abouche avec l'urethre : mais l'une & l'autre veſſie de ces Jumeaux n'avoit point de col, & l'urethre qui ſortoit d'abord de chaque veſſie, ſe courboit ſous le ligament qui ſepare les deux baſſins, à peu près comme il fait ſous les os pubis dans la conformation ordinaire, & il paſſoit entre les corps caverneux.

Dans le trajet que l'urethre faiſoit depuis ſa naiſſance juſqu'à la verge, il étoit garni de pluſieurs muſcles.

Outre ceux qui tiennent lieu des accelerateurs, il y en avoit deux paires particulieres dans chaque Enfant.

La premiere prenoit ſon origine de la partie anterieure du trou ovale, & deſcendant un peu obliquement s'inſeroit à la partie de l'urethre qui regarde le coccyx. La ſeconde paire ſortoit de la partie inferieure du même trou ovale, & remontant & repaſſant ſous la premiere paire s'implantoit dans la partie anterieure de l'urethre. On voit par-là que de chaque côté ces muſcles ſe croiſent, & que leur plan repréſente la machine qu'on appelle Sauterelle, dont un lozange embraſſe le conduit de l'urethre.

Du

Du côté où l'inteſtin s'ouvroit dans la veſſie, un des teſticules de chaque Enfant étoit placé dans l'aine, & renfermé dans une poche émanée du peritoine, dont l'entrée n'étoit pas fermée comme elle eſt dans les hommes, mais ouverte comme elle eſt dans les autres animaux.

De l'autre côté, les deux autres teſticules de ces Enfans étoient à nud dans la cavité du ventre, placez à la même hauteur, & attachez au peritoine. Les teſticules, les épididymes, les veſicules ſeminales, & tout ce qui appartient à ces parties avoit ſa conformation naturelle. Mais les vaiſſeaux déferens au lieu de s'ouvrir dans l'urethre, venoient s'inſerer dans chaque côté de cette veſſie un peu au-deſſus de la naiſſance de chaque urethre, & leur embouchure étoit ſimple & ſans caruncule.

Tout ce que les verges avoient de plus ſingulier, étoit que leurs racines étoient un peu plus écartées à cauſe de la ſeparation des os pubis, & qu'au lieu d'être ſuſpendues en devant comme à l'ordinaire, elles étoient abaiſſées & tournées en arriere un peu ſur le côté.

La conſtruction de la veſſie étant bien connue, il ſera plus aiſé de parler de la route des vaiſſeaux qui compoſoient le cordon.

Le cordon du fœtus ordinaire eſt compoſé de deux arteres, d'une veine & de l'ouraque. Le cordon de ces Jumeaux étoit compoſé d'un ouraque, de deux veines & de trois arteres.

L'ouraque ſortoit de l'échancrure ſuperieure des deux veſſies : elle ne paroiſſoit point percée, & l'on voioit clairement qu'elle étoit formée par un prolongement des fibres charnues des mêmes veſſies.

Il n'y avoit rien d'extraordinaire dans la route ni dans la groſſeur des deux veines : mais au lieu que le cordon de chaque fœtus a deux arteres, il n'y en avoit que trois pour ces deux Enfans, & elles étoient placées ſur le même côté de la double veſſie.

Pour rendre raiſon de la ſituation & de la route de ces trois arteres, il faut remarquer qu'un côté de la double veſſie étoit preſque tout occupé par les circonvolutions du colon & par ſon inſertion, & que ſur l'autre côté qui étoit libre, ces trois arteres étoient placées l'une au milieu, & les deux autres aux côtez.

L'un de ces Jumeaux avoit deux arteres ombilicales, & l'autre n'en avoit qu'une.

Dans celui qui avoit deux arteres, celle du côté droit faiſoit ſa route à l'ordinaire : celle du côté gauche ne pouvant ſe rendre au cordon à cauſe des obſtacles qui s'y trouvoient, deſcendoit ſous cette double veſſie ; & paſſant ſous la grande ſeparation dont on a parlé, remontoit par le milieu du côté oppoſé qui étoit libre juſqu'au cordon.

L'artere ombilicale de l'autre Jumeau étoit poſée à ſon côté gauche ; il n'y en avoit point au côté droit, parceque l'inteſtin & ſon mezentere occupoit la place où elle eût dû être : mais ſi cette artere étoit unique, elle étoit en récompenſe plus groſſe que les deux autres priſes enſemble, & l'iliaque d'où elle ſort étoit double de l'autre iliaque.

POUR comprendre les Uſages des parties ſingulieres qui ſe rencontroient dans ces Jumeaux, on remarquera que l'os pubis droit de chacun de ces Enfans alloit rencontrer l'os pubis

bis gauche de l'autre. Ces quatre os pubis joints enſemble deux à deux, & unis avec les os des iles, les iſchions & les os ſacrum, faiſoient un baſſin commun, ferme, ſolide, & commode pour renfermer les gros inteſtins & la veſſie qui étoient communs à ces Jumeaux.

Dans les autres hommes les os pubis ſont joints par un cartilage d'une conſiſtance ferme, & leur union eſt ſi étroite qu'ils preſtent fort peu.

Dans ces Jumeaux, au lieu d'un cartilage on voioit un ligament fort ſouple, qui joignoit de chaque côté l'os pubis droit de l'un avec l'os pubis gauche de l'autre; & cette eſpece d'union leur permettoit d'aprocher ou d'éloigner les troncs de leur corps l'un de l'autre juſqu'à un certain point, comme on pourra voir dans la ſuite; & afin que ce mouvement fût plus libre, les extrémitez par où ces os ſe joignoient étoient arrondies.

Si cette conformation ne venoit que de l'union de deux œufs & d'une eſpece de rencontre fortuite, il faudroit qu'elle eût été fort heureuſe; car pour peu que les extrémitez de ces os, qui ont peu de largeur euſſent gliſſé l'une ſur l'autre, preſque toutes les parties tant ſolides que molles qui compoſoient le baſſin, auroient été privées de leurs fonctions ſans reſſource; mais je n'entrerai pas dans ce détail qui meneroit trop loin.

On a obſervé que les muſcles droits étant parvenus vers la partie moyenne du ventre, ſe détournoient vers les côtez pour aller s'inſerer aux os pubis. Dans cette ſituation ils ne laiſſoient pas de faire leur fonction, & d'aider à comprimer le milieu de la partie inferieure du ven-

ventre ; parce qu'étant dans chaque Enfant inſerez aux os pubis, comme à deux points fixes, ils ne pouvoient ſe raccourcir que les aponevroſes, auſquelles ils ſont auſſi attachez, ne s'approchaſſent du plan de leurs appuis autant qu'il étoit poſſible, & ne comprimaſſent le bas du ventre de chaque Enfant.

Le foye, la ratte, le pancreas, l'eſtomac & les inteſtins grêles avoient leur conformation ordinaire dans ces Jumeaux, qui étoient par ce moyen pourvûs de tous les organes neceſſaires pour digerer les alimens, pour les convertir en chyle, & pour le bien filtrer.

La ſtructure des inteſtins merite une conſideration particuliere.

Les inteſtins grêles venoient s'ouvrir par leurs extrémitez dans un inteſtin commun qui leur ſervoit de colon. Il s'agit maintenant de faire voir la difference qui ſe rencontroit entre ce colon & celui des autres hommes.

Ce colon ordinaire fait un contour conſiderable en forme d'arc, attaché aux principaux viſceres du bas ventre ; il n'a qu'un méſentere, & il eſt garni de feuillets & de cellules.

Il n'y avoit qu'un ſeul colon pour ces Jumeaux ; il étoit court, avec un double méſentere, & garni de feuillets ſeulement dans le tiers de ſa longueur, & il n'avoit aucune connexion avec les viſceres du bas ventre.

La longue circonvolution des colons, les cellules, & les feuillets ordinaires ſervent à leur donner une grande capacité pour contenir plus de matieres, pour en retarder le cours, pour les rendre plus épaiſſes, & pour nous diſpenſer de la neceſſité de les rendre trop ſouvent. Dans ces enfans le colon étoit fort court, ſans cellules,

les, & peu garnis de feuillets; ainſi les matieres y ſéjournant moins y prenoient moins de conſiſtance; tout cela étoit neceſſaire à cauſe de la petiteſſe des paſſages par où elles devoient ſortir.

Comme cet inteſtin étoit fort court dans ces enfans, il étoit aiſément renfermé dans la partie du ventre qui leur étoit commune, ſans avoir beſoin d'être ſuſpendu, ni attaché auſſi fortement aux autres viſceres que le colon des autres hommes, lequel étant très-long, le poids & la quantité des matieres qu'il contient demandent qu'il ſoit ainſi ſoûtenu; mais les matieres ne ſéjournant pas long-temps dans le colon de ces enfans, il n'étoit pas neceſſaire qu'il fût d'une grande capacité ni qu'il y en eût deux.

On a dit que le colon de ces Jumeaux étoit attaché de chaque côté à un prolongement de leurs méſenteres, & que les vaiſſeaux de ces méſenteres, par un très-grand nombre de rameaux, venoient ſe ramifier de chaque côté ſur le corps de cet inteſtin où ils s'abouchoient les uns aux autres. Toutes ces anaſtomozes établiſſoient un commerce mutuel du ſang entre ces enfans, & les nerfs, par une diſtribution à peu près ſemblable, y établiſſoient pareillement une communication reciproque des eſprits.

De ce que l'on vient de dire, on peut juger aiſément que les bonnes & les mauvaiſes qualitez du ſang & des eſprits pouvant ſe communiquer par cette partie, toutes les maladies qui y pouvoient arriver, ou par les liquides dont elle étoit arroſée, ou par les matieres qu'elle renfermoit, auroient été communes à ces deux freres. Ainſi il n'étoit pas poſſible, que l'un des deux

deux venant à mourir, l'autre pût vivre que fort peu de temps.

On a fait obſerver que le colon s'ouvroit par ſon extrémité dans une veſſie jumelle; que ſon embouchure étoit fort étroite, mais diſpoſée de maniere, qu'elle diſtribuoit preſqu'également les matieres dans chaque veſſie: Comme il n'y avoit point de ſphincter à l'embouchure de l'inteſtin dans la veſſie, on peut dire qu'elle faiſoit dans ces Enfans la fonction des inteſtins *Rectum*. En effet elle ſervoit de réceptacle aux excremens, & elle n'en permettoit la ſortie, que quand le ſphincter de l'urethre s'ouvroit; il tenoit donc lieu du ſphincter de l'anus & de celui de la veſſie.

Pluſieurs choſes favoriſoient cette ſortie. La premiere étoit la conſiſtence des excremens qui étoit fort molle, tant par le peu de ſéjour qu'ils faiſoient dans le colon, que par leur mêlange avec l'urine fournie par les quatre ureteres.

La ſeconde étoit la contraction de chaque veſſie qui étoit beaucoup plus forte que dans les autres enfans; parceque leur tunique muſculeuſe étoit beaucoup plus épaiſſe qu'à l'ordinaire. De plus, l'ouverture du conduit de l'urethre étant plus large qu'à l'ordinaire & dans la partie la plus baſſe de chaque veſſie, les excremens s'y portoient par leur propre poids. Quoique cette veſſie jumelle n'eût qu'une capacité commune, cependant elle recevoit de chaque côté l'urine par les deux ureteres de chaque enfant, & chacune avoit ſon urethre qui lui ſervoit comme à l'ordinaire de conduit de décharge; ainſi les excremens ſolides & les liquides mêlez enſemble ſortoient par les verges, qui faiſoient la fonction d'anus. Cette veſſie n'avoit ni col, ni proſtates,

proſtates, ni ſphincter; mais les deux paires de muſcles, dont l'urethre étoit garnie à ſa naiſſance, & qui ont été décrites, tenoient lieu de ſphincter: car comme elles ſe croiſoient & qu'elles embraſſoient le devant & le derriere de l'urethre dans un ſens oppoſé, il falloit de neceſſité qu'agiſſant enſemble elles comprimaſſent ce canal.

Il nous reſte à parler de la ſituation qui paroît avoir dû être la plus convenable & la plus commode à ces Jumeaux. Il nous a paru que c'eût été d'être à demi couchez avec quelque appui ſous le dos; d'autant que par ce moyen les parties du bas ventre, ſur tout celles qui leur étoient communes, pouvoient alors faire librement leurs fonctions. Cette ſituation jointe aux veſtiges qui reſtent de celle qu'ils avoient dans le ſein de la mere avec ce qu'elle nous a dit, nous a fait juger qu'ils y étoient à peu près dans la poſture que la figure repréſente, & qui inſtruira mieux que ce que nous en pourrions dire.

Quant au marcher, il nous a paru qu'ils pouvoient aller tous deux de côté du même ſens; mais on voit qu'il étoit impoſſible, que l'un allât en avant que l'autre ne reculât en arriere; & qu'ainſi ils auroient marché avec beaucoup de difficulté.

Les canaux déferens s'ouvroient dans la veſſie; & comme on n'y appercevoit point de ſphincters qui auroient pû empêcher l'écoulement continuel de la ſemence, ainſi que dans les autres hommes, il y a apparence que ces Jumeaux euſſent été ſteriles, parceque leur ſemence auroit été toûjours mêlée avec l'urine & les excremens groſſiers.

On attribue d'ordinaire la production des Monſtres, tantôt au hazard, tantôt à des mouvemens purement naturels mais déreglez, tantôt aux égaremens d'une vertu formatrice aveugle, à ce qu'on dit, même dans ſes ouvrages les plus reglez, & qui cependant agit comme ſi elle avoit de l'intelligence: mais le Monſtre dont nous venons de faire la deſcription, & le raport de ſa conformation interne à ſa figure exterieure, font bien voir qu'il n'a pû être l'ouvrage du hazard, ou d'une vertu formatrice aveugle, ni l'effet d'un dérangement fortuit des mouvemens naturels.

Depuis les envelopes juſqu'au plus profond des entrailles, tout y eſt d'un deſſein conduit par une Intelligence libre dans ſa fin, toute puiſſante dans l'execution, & toûjours ſage & arrangée dans les moiens qu'elle emploie.

Suivant l'ordre commun les hommes & les animaux à quatre pieds ont deux iſſues pour l'évacuation des excremens de la premiere digeſtion; l'une pour les ſolides, & l'autre pour les liquides: au lieu que dans ce Monſtre l'Intelligence dont je parle a voulu produire deux corps humains joints enſemble, qui puſſent être droits, s'aſſeoir, approcher ou éloigner les troncs de leur corps l'un de l'autre juſqu'à un certain point; elle a voulu conduire par un ſeul canal les excremens ſolides juſques dans un receptacle commun où ils ſe mêlaſſent avec les liquides, afin que chacun de ces Jumeaux pût enſuite les rendre ſeparément par la verge. On ne peut ſe diſpenſer de ſuppoſer cette volonté, puiſqu'on en voit ſi clairement l'execution. Je laiſſe aux Theologiens à en chercher les raiſons;

ſons ; mais cette volonté étant ſuppoſée, je dis que l'inſpection de ce Monſtre fait voir la richeſſe de la Mechanique du Créateur, au moins autant que les productions les plus reglées, puiſqu'à toutes les preuves que nous en avons, elle ajoûte encore celle-ci d'autant plus forte & plus convaincante, qu'étant hors des regles communes, elle montre mieux & la liberté & la fecondité de l'Auteur de cette Mechanique ſi variée dans ces ſortes d'ouvrages; car il doit paſſer pour conſtant que dans toutes les eſpeces de Monſtres qui ont paru, ſoit qu'ils aient été examinez ou non, il y a toûjours eu une ſtructure interne auſſi extraordinaire que leur figure exterieure a paru differente de celle des autres animaux de la même eſpece.

EXPLICATION DES FIGURES.

LA premiere Figure repréſente ces Enfans couchez ſur le dos.

AA. La partie du bas ventre commune aux deux Enfans.

B. Le nombril.

CC. Une eſpece de coûture legere, par laquelle ces Jumeaux paroiſſoient joints enſemble.

La ſeconde Figure repréſente une partie de ces Jumeaux vûs par derriere.

AA. Les deux verges qui naiſſent de l'endroit où devroit être l'Anus de chaque Enfant.

BBBB. Deux replis de peau qui repréſentent de chaque côté un Scrotum vuide & applati.

La troiſiéme Figure repréſente une partie de ces Enfans couchez l'un ſur l'autre, pour faire voir la ſituation naturelle des Verges, qui au lieu d'être ſuſpen-

dues en devant à l'ordinaire, après avoir pris leur naiſſance des os pubis qui ſont dans ces Enfans placez ſur les côtez, viennent s'attacher au ligament qui ſepare les deux baſſins, & qui les ſuſpend en arriere.

A. La Verge de l'Enfant qui eſt deſſous dans ſa ſituation naturelle.

BB. Son Scrotum.

C. La Verge de l'Enfant de deſſus, qu'on a relevée avec ſon Scrotum, pour mieux faire voir celle de l'Enfant qui eſt deſſous.

La quatriéme Figure repréſente les os des Baſſins de ces Jumeaux (qui n'en compoſent qu'un) vûs de côté un peu en deſſus.

AAAA. Les os des Iles.

BBBB. Les os Iſchions.

CCCC. Les Pubis.

DD. Les os Sacrum.

EE. Les Coccyx.

FF. Les ligaments qui joignent les os pubis d'un des Enfans avec ceux de l'autre.

La cinquiéme Figure repréſente les mêmes os vûs de front & un peu en deſſus.

AAAA. Les os des Iles.

BBBB. Les os Iſchions.

CCCC. Les os Pubis.

DD. Les os Sacrum.

EE. Les Coccyx.

FF. Les ligaments qui joignoient les os Pubis d'un des Enfans avec ceux de l'autre.

GG. Le ligament en forme de cintre renverſé qui ſeparoit les deux baſſins.

H. Ligne ponctuée qui marque l'endroit où étoit la coûture du bas ventre qui faiſoit auſſi un cintre, mais dans un ſens oppoſé.

La ſixiéme Figure repréſente les muſcles du bas ventre découverts.

AAAA. Les Muſcles droits.

BBBB. L'endroit où ils commencent à ſe détourner.

CCCC.

CCCC. Leur inſertion dans les os Pubis.

D. Le nombril au milieu de l'eſpace qui eſt entre ces Muſcles.

E. Les fibres tendineuſes, dont la peau étoit fortifiée à l'endroit de la coûture.

La ſeptiéme Figure repréſente les inteſtins comme ils paroiſſoient en ouvrant le bas ventre.

AAAAAA. Les inteſtins grêles des deux Jumeaux.

BB. L'endroit où les inteſtins nommez Ileons viennent s'ouvrir dans un inteſtin commun.

C. Cet inteſtin commun qui tient lieu de colon.

DD. Deux replis de cet inteſtin.

E. Un des Cœcum du ſecond inteſtin commun, dont la naiſſance n'a pû être marquée dans cette Figure.

F. L'appendice de ce Cœcum.

GH. Une partie de cet inteſtin qui va ſous les inteſtins grêles de l'un & de l'autre de ces Jumeaux.

I. La Veſſie.

LLL. Les trois Arteres ombilicales.

M. L'Ouraque.

NN. Les deux Veines ombilicales.

O. Le Cordon.

La huitiéme Figure repréſente les gros inteſtins & la Veſſie.

AA. L'extrémité de chaque Enfant.

B. Le gros inteſtin commun aux deux Enfans, dans lequel les deux Ileons s'ouvrent, & qui eſt garni de feuillets en dedans.

C. Le Cœcum de cet inteſtin.

D. Son appendice vermiforme.

EF. Deux replis de cet inteſtin.

G. L'endroit où cet inteſtin s'ouvre dans un autre inteſtin qui n'a point de feuillets.

H. Le premier Cœcum de cet inteſtin, dont le ſecond ne paroît pas, & ſera repréſenté ci-après.

I. L'appendice vermiforme de ce Cœcum.

L. Le premier repli de cet inteſtin paſſant ſous les inteſtins grêles de l'un des Jumeaux.

M. Le ſecond repli paſſant ſous les inteſtins grêles de l'autre Jumeau.

N. La portion de cet inteſtin qui paroît une eſpece de Rectum.

O. Son embouchure dans la Veſſie.

P. La Veſſie.

QQQQ. Les Vaiſſeaux du cordon.

RRR. Eſt la membrame parſémée de Vaiſſeaux, qui eſt un prolongement du Mezentere de l'un des Enfans, & qui eſt attachée à l'un des côtez de l'inteſtin commun.

SSS. Eſt une membrane ſemblable appartenant à l'autre Jumeau, & qui ſert pareillement de Meſocolon.

TTTT. La Veine mezenterique ſuperieure.

VVVV. La Veine mezenterique inferieure.

On n'a point fait repréſenter les Arteres pour ne pas trop charger la Figure.

La Figure neuviéme repréſente une portion des gros inteſtins.

A. Eſt l'extrémité du premier gros inteſtin qui eſt commun.

B. Son inſertion dans un autre gros inteſtin.

CC. Les deux Cœcums.

DD. Leurs Appendices.

E. Le corps de cet inteſtin.

La Figure dixiéme repréſente la Veſſie, les Reins, les Ureteres, les Teſticules, & leurs Vaiſſeaux.

A. La Veſſie double ou jumelle.

B. L'embouchure du gros inteſtin dans cette Veſſie.

CCCC. Sont les reins de chaque Jumeau.

DDDD. Les Arteres & Veines emulgentes coupées.

EEEE. Les quatre Ureteres de ces deux Jumeaux.

FFFF. Leurs inſertions dans les deux côtez de cette Veſſie jumelle.

GG. Deux des Teſticules, dont l'un appartenoit à l'un des Jumeaux, & l'autre à l'autre, & qui étoient enfermez dans la region de l'aîne.

HH. Les

HH. Les deux autres Testicules de ces deux Enfans qui étoient à nud dans la cavité du ventre.

IIII. Les Vaisseaux déferents de ces quatre Testicules, dont chaque paire vient s'ouvrir dans un des côtez de la Vessie particuliere à chaque Enfant.

LLLL. Les Vesicules seminales.

La Figure onziéme représente la Vessie ouverte par l'un des côtez.

A. Un des côtez de la Vessie dans son état naturel.

BB. Les Ureteres.

CC. Les Vaisseaux déferents.

DD. Les Vesicules seminales.

E. La naissance de l'Urethre.

F. La Vessie ouverte de l'autre côté.

GG. Les ouvertures des Ureteres dans l'un des côtez de la vessie.

HH. Les ouvertures des Canaux déferents.

I. L'embouchure de l'Urethre.

Dans toutes les Figures précédentes les parties sont représentées de telle maniere que le bas de la Vessie est en haut ; mais dans les Figures suivantes les parties sont dans un autre point de vûe, & représentées de maniere que la Vessie s'y trouve dans sa situation naturelle.

La douziéme Figure représente les deux plans des Fibres charnues d'un des côtez de la Vessie, dont une partie des longitudinales tire son origine du ligament qui separe les deux bassins, & qui sont marquées *AA.*

La treiziéme Figure est encore celle de la Vessie ; elle fait voir l'insertion de l'intestin commun dans la Vessie jumelle avec une espece de sac aveugle, & la naissance & le progrès des Urethres.

A. L'embouchure de l'intestin commun dans la Vessie.

B. Le sac aveugle.

CC. L'origine de chaque Urethre.

DD. L'endroit où elle se recourbe sous le ligament qui separe les deux bassins.

EE. Leurs extrémitez.

Les autres parties ont été expliquées dans les Figures précédentes.

La quatorziéme Figure repréſente les Muſcles particuliers de l'Urethre de ces Enfans.

A. L'Urethre vûe par ſa partie anterieure.

BB. Lignes ponctuées qui repréſentent les trous ovalaires des os innominez d'un des Jumeaux.

CC. La premiere paire de ces Muſcles qui s'implantent dans la partie de l'Urethre qui regarde le Coccyx.

DD. La ſeconde paire de ces Muſcles qui s'implante à la partie anterieure de l'Urethre.

La quinziéme Figure repréſente la Veſſie avec les vaiſſeaux du cordon.

AA. La double Veſſie.

BC. Les deux Arteres ombilicales de l'un de ces Jumeaux, dont celle qui eſt marquée *B* eſt dans ſa ſituation ordinaire, au lieu que celle qui eſt marquée *C* paſſe par deſſous la veſſie pour ſe rendre au cordon.

D. L'Artere ombilicale de l'autre Jumeau qui n'en a qu'une, & qui toute ſeule eſt auſſi groſſe que les deux autres enſemble.

E. L'Ouraque.

FF. Les deux Veines ombilicales.

G Le Nombril.

La ſeiziéme Figure repréſente ces Enfans comme on peut préſumer qu'ils étoient dans la matrice, & la Figure dix-ſeptiéme les repréſente dans la ſituation qui leur auroit été la plus commode aprés leur naiſſance. On s'eſt contenté de repréſenter ſeulement par un trait ces deux Figures.

DIS-

Fig. 1.

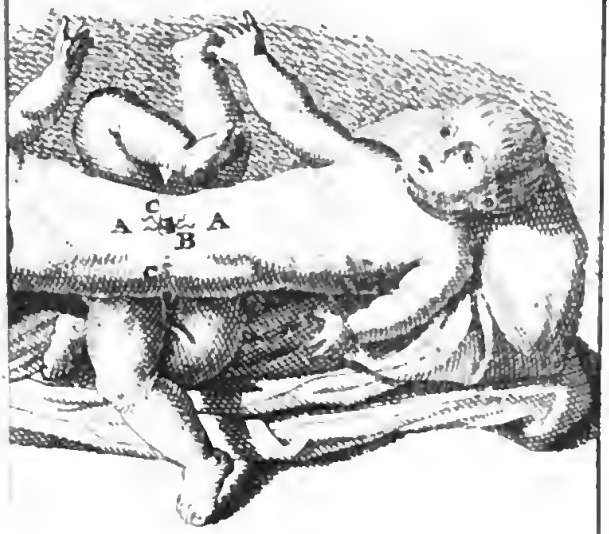
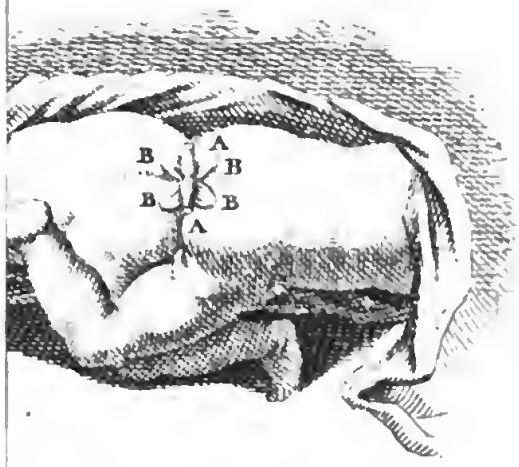


Fig. 2.



BIBLIOTECA NACIONAL

Fig. 3.

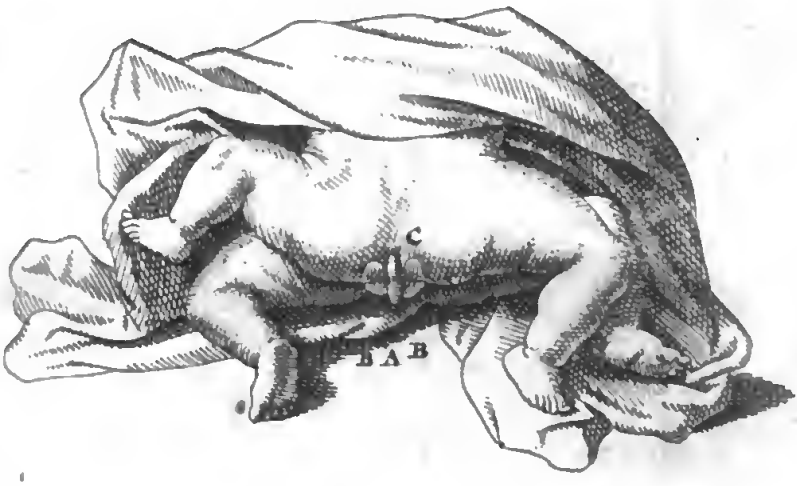
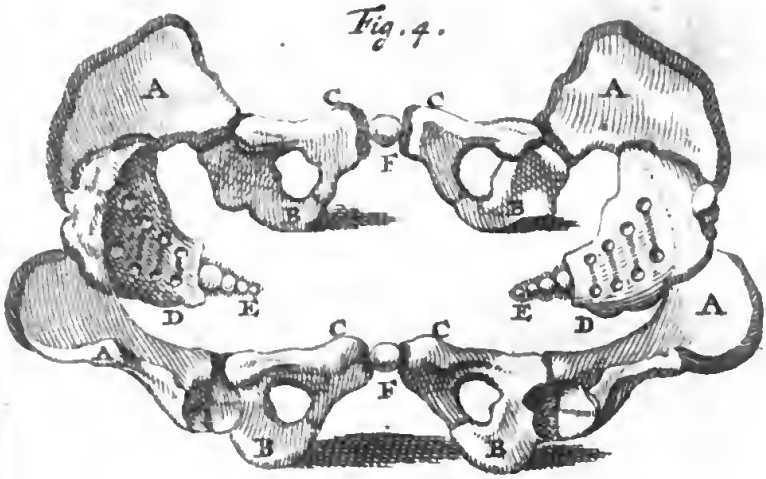


Fig. 4.



NAPOLI
TOMO

Fig. 5.

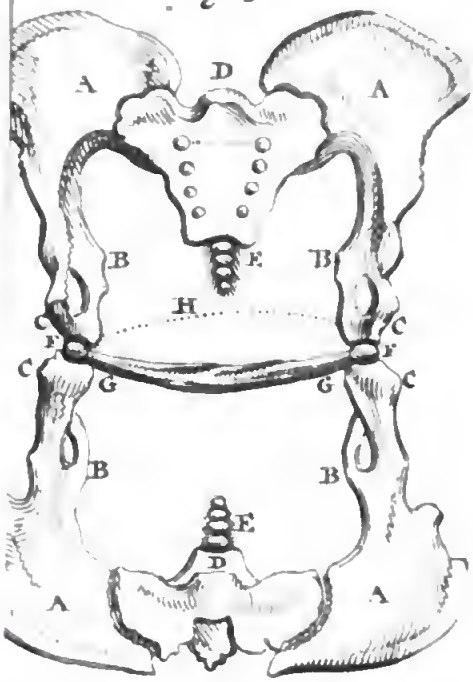
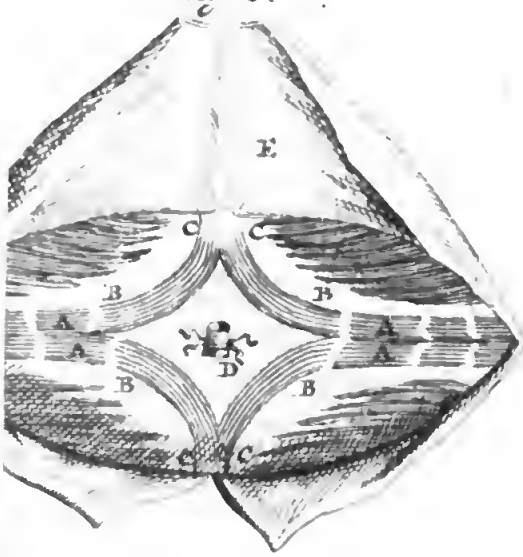


Fig. 6.



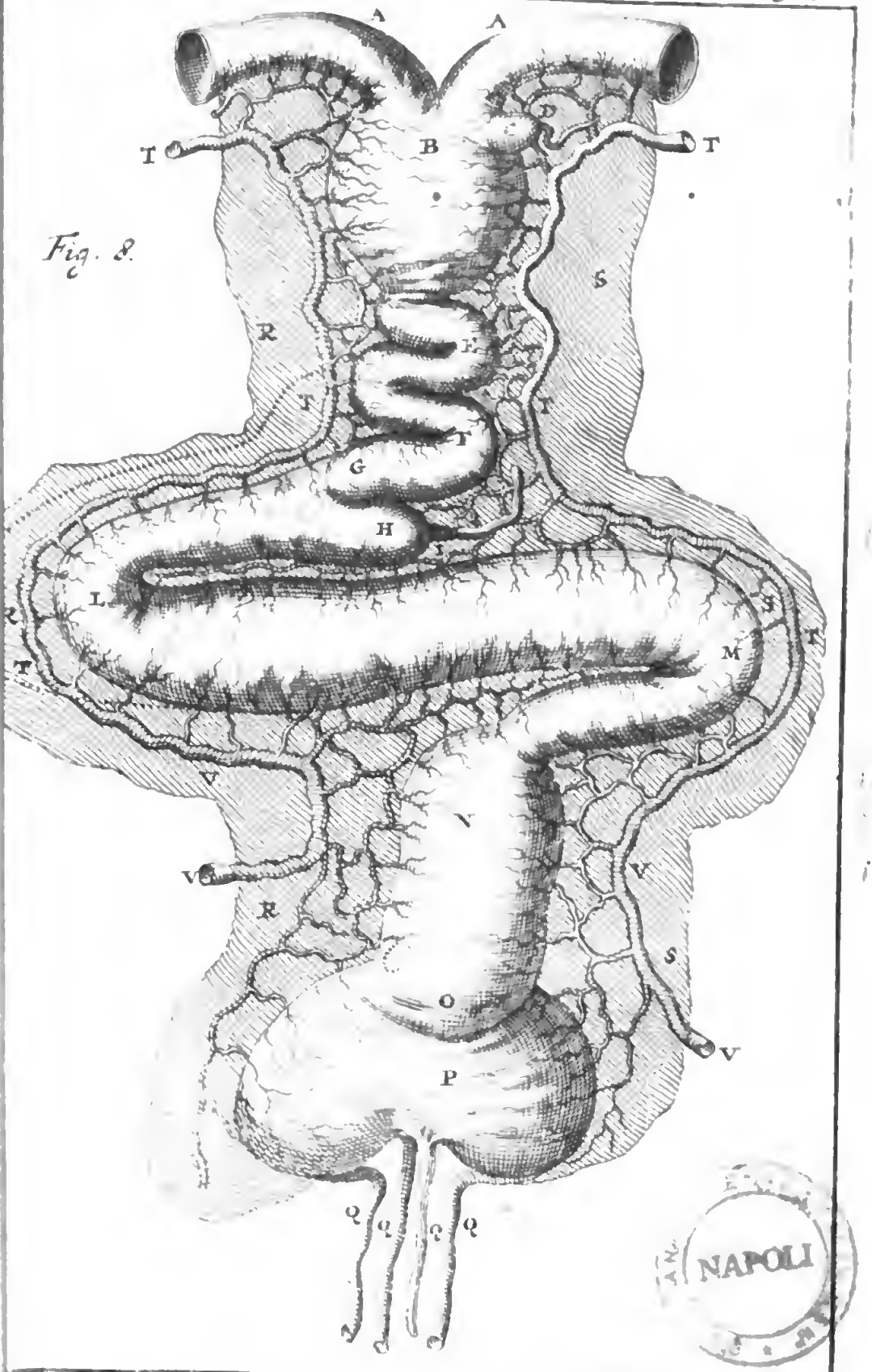
Digitized by Google

Mem. de 1706. Pl. 4. Pag. 560.

Fig. 7

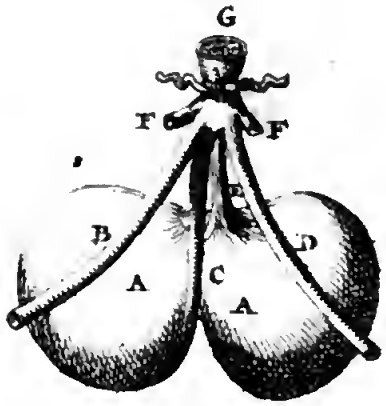
NAPOLI

Fig. 8.



NAPOLI

Fig. 25



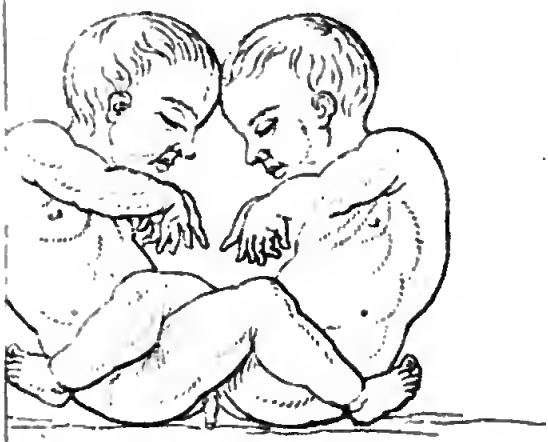


Fig. 27.

Digitized by Google

DISSERTATION SUR LES BAROMETRES ET THERMOMETRES.

PAR M. DE LA HIRE le fils.

* ON a beaucoup d'obligation aux Philoſophes du Siecle paſſé d'avoir trouvé le moien de déterminer les differens changemens qui arrivent à l'air conſideré comme corps à reſſort ou comme peſant, & l'on ne pouvoit faire dans la Phyſique une plus belle découverte ni une plus conſiderable, puiſqu'elle ſert à expliquer une infinité de Phenomenes qui avoient jetté les anciens Philoſophes dans un grand embarras, dont ils n'avoient pû ſe tirer qu'en attribuant à la nature une proprieté qu'elle n'avoit pas, & de laquelle cependant ils s'étoient ſervis pour rendre raiſon de tout ce qui regardoit cette partie de la Phyſique, dont tous les Phenomenes devoient être attribuez à la peſanteur & au reſſort de l'air.

Le célébre *Galilée*, Mathematicien du Grand Duc, fut le premier qui s'apperçut que l'eau dans le tuyau d'une pompe aſpirante ne pouvoit s'y ſoûtenir qu'à la hauteur environ de 32 pieds, & que le reſte du tuyau, s'il étoit plus haut, demeuroit vuide. La conſéquence qu'il tira de cette remarque fut, que la nature n'avoit d'horreur pour le vuide qu'à cette hauteur. C'é-

* 13 Novemb. 1706.

toit, comme l'on voit, conclure avec les Anciens, ce qui ne perfectionnoit point la Phyſique.

Toricelli qui fut ſon diſciple & ſon ſucceſſeur fit en 1643. une autre experience. Il prit un tuyau de verre de 4 pieds ouvert ſeulement par un bout, & l'aiant empli de mercure, il le renverſa dans un autre vaiſſeau plein auſſi de mercure, & s'appercût que celui qui étoit dans le tuyau deſcendoit & laiſſoit enhaut un eſpace qui devoit être vuide.

En 1644 on écrivit d'*Italie* cette experience au R. P. *Merſenne* Minime de *Paris*, qui la divulgua par toute la *France*; & M. *Petit* Intendant des Fortifications l'aiant ſûe & l'aiant appriſe à M. *Paſcal*, ils la firent enſemble à *Rouen* en 1646, & la trouverent conforme à ce qu'on avoit mandé d'*Italie*. Cela donna occaſion à M. *Paſcal* de faire pluſieurs autres experiences, dont il fit un petit Livre qu'il publia en 1647, & qu'il envoya par toute l'*Europe*. Il eut avis cette même année que *Toricelli* avoit ſoupconné que c'étoit la peſanteur de l'air qui avoit été cauſe que le mercure s'étoit ſoûtenu dans le tuyau quand il avoit fait l'experience dont nous avons parlé. Cela lui donna occaſion de faire encore de nouvelles experiences qui le confirmerent dans la penſée que *Toricelli* avoit eue, & qui lui firent avancer que tout ce qu'on avoit attribué à l'horreur du vuide n'étoit cauſé que par la peſanteur de l'air. Ce qu'il a parfaitement bien prouvé dans le Livre que nous avons de lui ſur cette matiere, & dont tous les Savans ſont demeurez d'accord. Voilà la ſuite & les dattes des experiences qui ont été faites pour découvrir cette belle pro-

proprieté de la peſanteur de l'air ignorée de tous les Philoſophes pendant un ſi grand temps. Je vais donner preſentement la deſcription des Machines qui ont été faites pour découvrir ſa vertu élaſtique, & je commencerai par la plus ancienne, & j'irai de ſuite ſuivant l'ordre des temps.

Sanctorius qui étoit de *Capo d'Iſtrie*, Medecin célébre par les Ouvrages qu'il a laiſſé, s'aviſa de faire une Machine appellée Thermometre, pour connoître les differens degrez de chaleur de ceux qui avoient la fiévre, ſans faire attention, ſuivant toutes les apparences, que la même Machine pourroit lui montrer les changemens qui arriveroient à l'air, qui peut augmenter de volume par les differentes chaleurs, & qu'elle ſeroit fort curieuſe, & plus utile au public par la connoiſſance qu'elle lui donneroit des degrez de la temperature de l'air, que par l'application qu'il en vouloit faire à la Medecine.

Ce Thermometre étoit compoſé de deux boules de verre attachées à un tuyau de verre recourbé par enbas, & tout proche de la boule inferieure; la boule ſuperieure qui n'avoit point de communication avec l'air exterieur, & une partie du tuyau étoit pleine d'air tel que nous le reſpirons, & le reſte avec une partie de la boule inferieure, qui étoit ouverte par ſa partie ſuperieure, étoit remplie d'eau ſeconde. Il eſt aiſé de voir par cette conſtruction que lorſque l'air de la boule ſuperieure ſe dilatoit par la chaleur, il comprimoit l'eau ſeconde qui étoit dans le tuyau & l'obligeoit d'y deſcendre, & la laiſſoit remonter quand il ſe condenſoit.

Cette Machine, quoique ſujette à quelques in-

irrégularitez, ne laiſſa pas d'être trouvée fort curieuſe par tous les Savans, & d'être miſe en uſage juſqu'au temps où l'on trouva le Barometre; car alors on s'apperçut d'un très-grand défaut qu'elle avoit, qui étoit d'agir auſſi comme Barometre, ce qui pouvoit ſouvent détruire tout l'effet qu'elle pouvoit avoir comme Thermometre, à cauſe que l'air de la boule inferieure communiquant avec l'air exterieur agiſſoit ſur la liqueur, & l'obligeoit à monter ou à deſcendre ſelon qu'il étoit plus ou moins peſant. Ce fut un malheur pour le Thermometre de *Sanctorius* de ce qu'on découvrit le Barometre: mais il ne dura pas long-temps; car quelques Savans de *Florence* aiant travaillé ſur cette matiere, en conſtruiſirent un autre qui n'avoit point le défaut du premier. Je n'ai pû ſavoir d'autre datte du temps où il avoit été trouvé, quoique je l'aye cherché avec beaucoup de ſoin, que dans le Livre de *Guerick* intitulé *Experimenta Magdeburgica*, & imprimé en 1672, où il dit qu'il y a environ 30 ans qu'il a été découvert, & dans les Diſſertations Academiques de M. *Petit* imprimées en 1671 où il y en a une deſcription, & où il eſt marqué que l'invention en eſt dûe à l'Academie de *Florence* qui en a donné une figure & une deſcription dans le Livre qu'on a d'elle intitulé *Saggi di Naturali Eſperienze.*

Ce Thermometre qu'on doit appeller de *Florence*, & qui eſt celui qui eſt le plus en uſage preſentement, & très-commode pour toutes les experiences qu'on veut faire, pour être tranſporté, & pour ſa conſtruction qui eſt fort ſimple; car il n'eſt compoſé que d'une boule de verre à laquelle eſt attaché un tuyau ſcelé hermé-

metiquement par enhaut, dont la groſſeur & la longueur ſont proportionnées de telle maniere au diametre de la boule qui eſt remplie d'eſprit de vin avec une partie du tuyau, que dans les plus grandes chaleurs la dilatation de l'eſprit de vin ne rempliſſe pas tout à fait le tuyau, & que dans les plus grands froids ſa condenſation n'aille pas juſqu'à rentrer dans la boule.

Quoique ce Thermometre eût de très-grandes commoditez, il ne laiſſoit pas d'avoir une très-grande incommodité: c'étoit de ne pouvoir faire la comparaiſon de la temperature de l'air d'un païs avec celle d'un autre, à moins que ce ne fût le même Thermometre qu'on tranſportât, ou differens diviſez ſur les mêmes degrez de chaleur: mais M. *Amontons* qui étoit de cette Academie, & un des meilleurs genies de ce Siecle pour la Phyſique, trouva le moien de le rendre univerſel ſans rien changer à ſa conſtruction, en fixant un degré de chaleur auquel on pouvoit rapporter tous les autres, qui eſt celui de l'eau bouillante, & qui doit être le même par toute la terre ſuivant l'experience de M. *Amontons*; enſorte qu'il ſembloit qu'on ne pouvoit rien ſouhaiter de plus parfait ſur cette matiere. Cependant M. *Nuguet* vient d'en publier un autre cette année, qu'il prétend bien meilleur que tout ce qui a paru juſqu'à preſent, comme on le peut voir par le titre qu'il y a mis, que voici:

Nouvelle découverte d'un Thermometre cherché depuis long temps par Meſſieurs de l'Academie Royale des Sciences, exemt des défauts des autres Thermometres, contenant tous les avantages qui ne ſe trouvent que ſeparément & par parties dans ceux dont on s'eſt ſervi juſqu'à preſent.

Je ne doute point que M. *Nuguet* n'ait crû par ce titre faire beaucoup valoir ſon Thermometre dans l'eſprit du public; mais il ne devoit pas pour cela y citer l'Academie, n'aiant vû en aucun endroit qu'elle ait jamais cherché un Thermometre tel qu'il le propoſe, à moins que ce ne ſoit à cauſe que M. *Amontons*, environ 12 ans avant que d'être de l'Academie, en avoit voulu faire un qui étoit à peu près ſemblable à celui qu'il a fait; mais aiant reconnu qu'il ſeroit défectueux & bien plus difficile à conſtruire que celui de *Florence*, il l'abandonna. Je ne crois pas que ce que je viens de rapporter ſoit valable pour autoriſer M. *Nuguet* à citer l'Academie qui n'eſt point garante des fautes que peuvent faire ceux qui en ſont, & à plus forte raiſon de celles qu'ils ont pû faire quand ils n'en étoient pas encore. Paſſons à l'éxamen de ſon Thermometre, & voions s'il répond au titre qu'il porte.

Ce Thermometre eſt aſſez ſemblable au Barometre de M. *Huygens*. Il eſt compoſé d'une boule de verre ſcelée hermetiquement & pleine d'air condenſé par le froid de l'eau à la glace, & de 4 tubes cylindriques ſoudez & joints les uns aux autres, & qui tous enſemble n'en font qu'un ſeul recourbé dont la courbure eſt enbas. On emplit ce tuyau comme le Barometre double, avec des précautions cependant dont nous parlerons dans la ſuite; ce qui fait que l'eſpace depuis le haut de ce tuyau juſque vers le milieu du premier tube eſt vuide d'air groſſier, & qu'enſuite il y a du mercure juſque vers le milieu du troiſiéme tube qui eſt au-deſſus de la courbure dans l'autre branche, & au-deſſus du mercure il y a de l'eſprit de vin juſque vers le mi-

milieu du quatriéme tube au haut duquel eſt attaché la boule qui eſt pleine d'air comme le reſte de ce même tube. Il eſt aiſé de voir par cette conſtruction que dans la chaleur l'eſprit de vin doit deſcendre, & remonter dans le froid; parceque l'air de la boule & d'une partie du tuyau ſe dilatant par la chaleur oblige l'eſprit de vin de deſcendre, & ſe condenſant par le froid laiſſe la liberté à l'eſprit de vin de remonter. Je ne crois pas que cette conſtruction, non-plus que la maniere de le remplir, paroiſſe plus ſimple que celle du Thermometre de *Florence*. Mais voions ſurquoi il établit le rapport de ſes tubes, d'où dépend toute la conſtruction de ſon Thermometre.

La proportion qu'il a priſe entre le tube où ſe meut l'eſprit de vin & les tubes dans leſquels le mercure ſe termine de part & d'autre, & entre la peſanteur de l'eſprit de vin & celle du mercure, eſt telle, que quand la liqueur eſt arrivée au haut du troiſiéme tube qui marque les plus grandes chaleurs de l'été, l'air de la boule ſupporte 4 pouces de mercure plus qu'il n'en ſoûtient quand cette même liqueur eſt parvenue à l'entrée de la boule qui marque les plus grands froids de l'hyver. La raiſon qu'il rapporte pour prendre cette proportion, eſt que l'air renfermé acquiert par les plus grandes chaleurs de l'été la force de ſoûtenir 4 pouces de mercure plus qu'il n'en ſoûtient pendant les plus grands froids de l'hyver.

Il y a pluſieurs remarques à faire ſur ce que je viens de dire qui eſt tiré de ſon écrit.

1°. Qu'il ne parle point du diametre de la boule dans laquelle l'air eſt enfermé, à quoi cependant il devroit faire attention; car nous avons

avons fait des experiences qui nous ont montré que differens volumes d'air enfermez & exposez à un même degré de chaleur ſoûtenoient le mercure à differentes hauteurs, ce qui l'obligera à faire ces boules parfaitement égales dans tous ſes Thermometres, & les tubes égaux ou dans la même proportion, ce qui eſt preſqu'impoſſible dans l'execution.

2°. Qu'il ne dit pas en quel endroit de la terre la difference des plus grandes chaleurs de l'été aux plus grands froids d'hyver ſoûtient 4 pouces de mercure, il eſt probable que c'eſt à *Paris*, où les termes en ont été connus depuis un certain temps : mais quand on voudra avoir de ces Thermometres dans d'autres païs, il y en faudra faire; ceux qu'il a fait pour *Paris* n'y pouvant pas ſervir, à cauſe que les plus grandes chaleurs d'été & les plus grands froids d'hyver, ſur leſquels il en établit la conſtruction, changent ſuivant les païs ; ce qui obligera de les connoître, & ce qui eſt une grande difficulté.

3°. Qu'il devoit marquer ſi cet air tel que nous le reſpirons qui a la force en été de ſoûtenir 4 pouces de mercure plus qu'en hyver, eſt enfermé en le comprimant ou condenſant; parceque quand on lit l'explication de ſon Thermometre, il ne paroît pas que cet air ſoit condenſé : cependant celui de la boule de ſes Thermometres l'eſt par le froid de l'eau à la glace. C'eſt ce qui jette dans une difficulté, à cauſe que celui ſur lequel il établit la conſtruction de ſes Thermometres eſt d'une façon, & que celui qui eſt dans la boule eſt d'une autre, & que cependant il paroît conclurre l'effet que doit faire celui de la boule par celui que l'autre a produit.

4°. Qu'il

4°. Qu'il aura toûjours beſoin de glace pour conſtruire ſes Thermometres, ce qui eſt un embarras.

5°. Qu'il doit faire attention, quand il veut faire ſes Thermometres, aux differentes hauteurs d'atmoſphere qui cauſent des changemens au corps de l'air.

6°. Qu'il doit prendre garde aux differens degrez de ſechereſſe & d'humidité de l'air qui peuvent produire quelque alteration dans ſon Thermometre.

Voila bien des précautions qu'on aura de la peine à prendre, & des difficultez bien difficiles à ſurmonter dans l'execution.

Examinons préſentement les précautions que cet Auteur dit qu'il faut apporter pour remplir ſon Thermometre.

Avant que de ſceler l'extrémité de la boule, il faut avoir ſoin que l'eſprit de vin contenu dans le tube qui eſt joint à la boule, réponde par ſa partie ſuperieure au degré de la graduation du Thermometre ordinaire qui exprime exactement le froid de l'eau à la glace dans laquelle ils ſont plongez, & parce qu'il proportionne tellement la quantité de l'eau & la quantité de glace dont il ſe ſert, que le froid qui provient du mélange de ces deux choſes, eſt ſuffiſant pour faire deſcendre la liqueur du Thermometre ordinaire au 34e degré de ſa graduation: il introduit de la liqueur dans ce tube juſqu'à ce que ſon extrémité ſuperieure réponde à un point qui marque le 33e degré de la graduation de ſon Thermometre.

Il eſt évident que par cette maniere de remplir ſes Thermometres, il aura toûjours beſoin de celui de *Florence*, & qu'il ne les rendra pas uni-

univerſels, puiſqu'il n'y aura que ceux qui auront été faits ſur un même Thermometre ordinaire qu'on pourra comparer, ſuppoſé que dans toutes les autres parties ils puiſſent être égaux, n'étant pas perſuadé que le 33e degré de ceux dont on ſe ſert ordinairement, exprime le même degré de froid, parce que ce 33e degré n'eſt point déterminé par une même cauſe par toute la terre comme celui qui eſt marqué par la chaleur de l'eau bouillante. Ce ſont en général les difficultez qui m'ont paru dans la conſtruction du Thermometre de M. *Nuguet*; il ne me reſte plus qu'à donner la comparaiſon que j'en ai faite avec celui de *Florence* dont nous nous ſervons il y a très-long-temps.

Le 25 Juin de cette année 1706 à 2 heures & $\frac{1}{4}$ après midi, le ciel étant ſerein, j'expoſai au ſoleil dans un lieu où il ne faiſoit point de vent, ce dernier Thermometre & celui dont nous nous ſervons que mon Pere fit faire par M. *Hubin* il y a plus de 30 ans, dont la boule a 1 pouce 11 lignes de diametre, & le tuyau a 3 pieds 9 pouces de long ſur une ligne à peu près de diametre interieur. Celui de M. *Nuguet* étant poſé bien à plomb, à quoi il faut prendre garde afin qu'il faſſe ſon effet, deſcendit juſqu'à 93 degrez & demi, & quelques minutes après remonta juſqu'à 89 degrez & demi, & y reſta étant toûjours expoſé au ſoleil; ce qui fait voir qu'on ne peut pas attribuer cet effet ni à l'air qui auroit pû être rafraîchi pendant l'experience, parce que ou l'air auroit continué d'être rafraîchi, & alors l'eſprit de vin auroit dû continuer de monter, ce qu'il ne fit pas; ou l'air ne l'auroit été que pour quelques minutes, & alors les rayons du Soleil l'auroient réchauffé & l'eſprit de vin

vin auroit dû redeſcendre, ce qu'il ne fit pas non plus ; ni à la diminution de l'action des rayons du Soleil cauſée par ſa difference de hauteur ſur l'horizon, parce qu'aiant deſcendu au plus bas en peu de temps, quand il commença à remonter il auroit dû continuer juſqu'à la fin de l'experience, ce qu'il ne fit pas; il ne faudra donc pas avoir recours à ces raiſons-là pour expliquer ce fait, mais à celles que je donne dans la ſuite. Le nôtre étant à côté, monta juſqu'à 86, & ne s'éleva plus ſenſiblement; le temps qu'ils y furent expoſez fut d'environ 25'; enſuite je les ôtai tous deux, & les mis dans une chambre ouverte à l'Eſt & où le Soleil ne donnoit point; & après y avoir été aſſez de temps pour ne plus changer ni l'un ni l'autre, je trouvai que celui de M. *Nuguet* étoit remonté a 78 degrez & demi, & que le nôtre étoit deſcendu à 64 degrez & demi; & ainſi la difference de l'état où étoit celui de M. *Nuguet* expoſé au Soleil à celui de la chambre, étoit de 11 degrez qui valent 3 pouces 3 lignes & demie, & la difference des deux expoſitions du nôtre étoit de 21 degrez & demi, qui valent 7 pouces 3 lignes & demie : donc le nôtre a été une fois plus ſenſible que le ſien ; mais on en pourra faire comme le nôtre qui ſeront encore beaucoup plus ſenſibles ; car il n'y aura qu'à augmenter le diametre de la boule, ou mettre un tuyau plus delié qu'il faudra faire aſſez long afin qu'il ne caſſe pas pendant les grandes chaleurs.

Il eſt à propos d'avertir ici ceux qui ne ſavent pas les regles de Dioptrique, qu'ils ne doivent pas attribuer le grand effet des Thermometres de *Florence* quand ils ſont expoſez au So-

Soleil, à la figure ſpherique de leurs phioles, qui ne doit pas plus augmenter l'action de ſes rayons ſur l'eſprit de vin qui y eſt contenu, que s'il y étoit expoſé à nud dans tout autre vaiſſeau; parce que ſi par la figure de la courbure de la phiole, les rayons qui y tombent vont en ſe raſſemblant en paſſant au dedans de la liqueur, & qu'ils échauffent la partie qu'ils touchent par cette réunion plus qu'ils ne feroient s'ils n'étoient raſſemblez, auſſi ils abandonnent une autre partie de cette liqueur contre laquelle ils ne font aucune action; ce qui fait que l'un recompenſe l'autre.

Le Thermometre de M. *Nuguet* n'aura donc pas l'avantage qu'il prétend de parcourir un plus grand eſpace que celui de *Florence*. De plus le ſien doit toûjours avoir près de 3 pieds; au lieu qu'on peut faire l'autre auſſi petit qu'on veut, & qui aura néanmoins autant de juſteſſe à proportion que les plus grands; ce qui eſt fort commode en pluſieurs occaſions.

Il ne me reſte plus qu'à expliquer pourquoi, quand j'eus expoſé au Soleil ce nouveau Thermometre, il deſcendit au plus bas à 93 degrez & demi, & qu'enſuite il remonta à 89 degrez & demi; c'eſt parce que la chaleur agiſſant ſur l'air & ſur l'eſprit de vin en même temps, & l'air étant plus ſuſceptible de dilatation, il fit d'abord deſcendre l'eſprit de vin aſſez promptement, qui eſt le ſeul avantage que je ſache que ce Thermometre ait pardeſſus les autres: mais enſuite l'eſprit de vin s'étant échauffé, il comprima l'air par ſa dilatation, & remonta de 4 degrez, ce qui prouve qu'on doit regarder ce nouveau Thermometre comme compoſé de deux autres, l'un à air comme celui de *Sanctorius*,

rius, & l'autre à eſprit de vin comme celui de *Florence*, mais qui agiſſent l'un contre l'autre. Enfin l'on peut conclure après ce que je viens de rapporter, que le Thermometre de M. *Nuguet* n'a pas tous les avantages qu'il lui attribue, puiſqu'il eſt beaucoup moins ſenſible, beaucoup moins exact, beaucoup moins portatif, beaucoup plus difficile à conſtruire, & beaucoup plus compoſé que l'ordinaire à eſprit de vin.

DES LOIX DU MOUVEMENT.

PAR M. CARRÉ,

* IL n'y a guéres de queſtions dans la Phyſique, qui aient plus exercé les Philoſophes & les Mathématiciens du ſiécle paſſé, que celles des Loix du Mouvement. En effet ces queſtions ſont des plus curieuſes & des plus importantes de cette Science. Je ne parlerai point de tous les Auteurs qui en ont traitté, ni des erreurs où pluſieurs ſont tombez; je m'attacherai ſeulement à démontrer une Régle générale, de laquelle je tirerai par Corollaires, le grand nombre de Propoſitions, que ces Auteurs ont démontrées d'une maniére très-longue & très-embarraſſée.

DÉFINITIONS.

1. La *Maſſe* d'un corps eſt la quantité de matiére propre qu'il contient dans l'eſpace qu'il occupe, & cet eſpace s'appelle *Volume*.

2. La

* 7. Decemb. 1706.

2. La *Viteſſe* d'un corps eſt le rapport de l'eſpace au temps, ou l'eſpace parcouru diviſé par le temps employé à le parcourir.

3. La *Force* d'un corps eſt le produit de ſa maſſe par ſa vîteſſe.

L'on nommera dans la ſuite les maſſes de deux corps qui ſe choquent, m, n, & leurs vîteſſes v, r.

COROLLAIRES.

Il eſt évident, 1°. Que ſi deux corps inégaux ſe meuvent avec des vîteſſes égales, leurs forces ſeront en même raiſon que leurs maſſes ou quantitez de matiere.

2°. Si ces corps ſont égaux, & ſe meuvent avec des vîteſſes inégales, leurs forces ſeront en même raiſon que leurs vîteſſes.

3°. Si ces corps ſont inégaux en maſſes & en vîteſſes, leurs forces ſeront en raiſon compoſée de leurs maſſes & de leurs vîteſſes.

4°. Si deux corps inégaux ont des forces égales, leurs vîteſſes ſeront réciproquement proportionelles à leurs maſſes.

L'on ſuppoſe dans la ſuite que les corps ſont à reſſort, & qu'ils ſe choquent directement, c'eſt à dire que le centre de peſanteur de chacun de ces corps & leur centre commun de peſanteur ſe trouvent dans la même ligne; ou bien, ſi ce ſont des globes, que la ligne qui joint le centre de ces corps paſſe par leur point d'attouchement dans l'inſtant du choc; ce qui revient au même.

PROPOSITION GENERALE.

I. Si deux corps à reſſort ſe choquent par des mou-

mouvemens contraires ; je dis que la ſomme de ces corps eſt au double de l'un ou de l'autre, comme la ſomme de leurs vîteſſes eſt à une vîteſſe telle, qu'étant ôtée de la vîteſſe de l'un ou de l'autre de ces corps avant le choc, le reſte ſera la vîteſſe de ce même corps après le choc ; ou ce qui revient au même, que la vîteſſe de chacun de ces corps après le choc ſera égale à ſa vîteſſe avant le choc moins le produit du double de l'autre par la ſomme de leurs vîteſſes diviſé par la ſomme de leurs maſſes.

Soient deux corps inégaux, m, n, qui ſe choquent par des mouvemens contraires avec les vîteſſes, v, r ; il faut démontrer que ſi l'on fait, $m+n.\ 2n :: v+r.\ \frac{2n \times \overline{v+r}}{m+n}$; & $m+n.\ 2m :: v+r.\ \frac{2m \times \overline{v+r}}{m+n}$, ces vîteſſes étant ôtées de v & de r, les reſtes $v - \frac{2n \times \overline{v+r}}{m+n}$; $r - \frac{2m \times \overline{v+r}}{m+n}$ ſeront les vîteſſes que ces corps m & n auront après le choc.

Pour démontrer cette Propoſition, il faut conſiderer que par le choc ces corps ſe compriment mutuellement, la réaction étant égale à l'action. Ils s'applatiſſent même quelque peu dans l'endroit dont ils ſe choquent. L'experience le confirme : car ſi l'on met ſur un plan poli & fort dur une legere couche de ſuif fort mince, & qu'on laiſſe tomber deſſus une balle d'yvoire, de verre ou d'acier d'une ſphericité la plus parfaite que faire ſe pourra, on voit ſur ce plan un cercle qui eſt d'autant plus grand, que la balle eſt tombée de plus haut, ou qu'elle a été

été pouſſée avec plus de force : ce qui fait connoître viſiblement que cette balle, qui ne devoit toucher ce plan que dans un très-petit eſpace, s'eſt appliquée ſur un grand nombre de ſes parties en s'applatiſſant. D'où l'on doit conclure que les corps à reſſort qui ſe choquent, s'applatiſſent réciproquement, c'eſt à dire que les petites parties dont ils ſont compoſez, cedent & obéiſſent pour ainſi dire les unes après les autres à l'effort du choc, juſqu'à ce que la * force des mouvemens contraires, qui comprime & applatit ces corps, aiant forcé la matiere ſubtile qui fait leur reſſort, d'en abandonner les pores pour un inſtant, faſſe équilibre avec l'effort que cette matiere fait pour y rentrer. Mais dans cet état, il eſt clair que ce qui reſte de force ou de mouvement dans la partie la plus éloignée du point de rencontre, c'eſt à dire dans celle qui n'a point été comprimée par le défaut de reſiſtance, ou parceque le choc n'a pas été aſſez grand, doit ſe diſtribuer également dans le reſte de ſa maſſe, & dans celle du plus foible de la même maniere que dans les corps mous : Donc ce qui reſtera de force dans ces deux corps, que l'on regarde dans cet inſtant comme réunis en un, eſt égale à la difference de leurs momens ou de leurs forces qui eſt $mv - nr$; diviſant donc cette difference par la ſomme des maſſes $m + n$, on aura $\frac{mv - nr}{m + n}$ pour leur vîteſſe commune dans cet inſtant du choc : ce qui eſt évident, puiſque dans cet inſtant il ſe perd ou ſe détruit autant de force dans

* *Voyez la ſeconde Partee des Loix du Mouvement du R. P.* Malebranche, Rech. de la Verité *de l'Edition de* 1700.

dans le grand que dans le petit, & que ces corps allant de compagnie s'ils étoient veritablement mous, la force reſtante ſe diſtribueroit également dans les deux corps que l'on doit regarder comme n'en faiſant plus qu'un. Or la force ou le moment d'un corps eſt le produit de ſa maſſe par ſa vîteſſe, donc il faut diviſer cette force reſtante par la ſomme des maſſes, & l'on aura leur vîteſſe commune.

Il faut prendre garde que le mouvement du plus fort ſe fait du même côté devant & après ce premier inſtant du choc; ainſi ſa vîteſſe eſt réellement $\frac{mv - nr}{m+n}$: mais pour celle du plus foible, elle doit être $\frac{-mv+nr}{m+n}$, parceque ſon mouvement tend à ſe faire du côté oppoſé après le choc.

Maintenant parceque la compreſſion & l'applatiſſement de ces corps ne ſe fait qu'à proportion de la force du plus foible, c'eſt à dire de la réſiſtance que le plus fort trouve dans le plus foible, il eſt clair que cette compreſſion ne doit augmenter que juſqu'à ce que celui qui a le moins de force, ait acquis une vîteſſe égale à celle qui reſte dans le plus fort, puiſqu'alors le plus foible ne lui réſiſte plus ou n'empêche plus ſon mouvement: car le reſſort des corps qui ſe choquent, ne ſe bande que juſqu'à ce qu'ils puiſſent aller de compagnie; alors leurs pores ne ſont plus réciproquement comprimez par l'action du plus fort ſur le plus foible: ainſi le reſſort commence à ſe débander par l'action de la matiere ſubtile qui les pénétre, & qui rentre dans les pores d'où elle a été chaſſée : Il eſt donc évident que ces corps, dont je ſuppoſe

que le reſſort n'a point été affoibli par le choc, doivent être repouſſez à proportion que cette matiere ſubtile a reçû du mouvement par la compreſſion, laquelle dépend toûjours de la vîteſſe reſpective des corps qui ſe choquent. Or puiſque ces deux corps s'appuient immédiatement l'un ſur l'autre dans le temps que la matiere ſubtile leur rend le même mouvement qu'elle a reçû de leur compreſſion, il eſt neceſſaire qu'ils ſoient repouſſez l'un & l'autre avec des forces égales, & par conſéquent que ces ſecondes vîteſſes ſoient réciproques à leurs maſſes. Faiſant donc $m+n.\ n::v+r.\ \frac{nv+nr}{m+n}$, ce ſera la vîteſſe du corps m; puis faiſant $m+n.\ m::v+r.\ \frac{mv+mr}{m+n}$, ce ſera la vîteſſe du corps n; mais il faut encore prendre garde que ces vîteſſes ſont negatives, à cauſe de la réaction de la matiere ſubtile, qui rétablit ces parties comprimées & applaties dans leur état naturel, & par conſéquent repouſſe ces corps du côté oppoſé à leur mouvement avant le choc. Ajoûtant donc les premieres vîteſſes $\frac{mv-nr}{m+m}$, & $\frac{-mv+nr}{m+n}$, puiſqu'elles ne ſont point détruites, avec celles-ci $\frac{-nv-nr}{m+n}$, & $\frac{-mv-mr}{m+n}$; l'on aura enfin pour la vîteſſe du corps m après le choc $\frac{mv-nv-2nr}{m+n}$, & $\frac{nr-mr-2mv}{m+n}$ pour celle du corps n: ou ce qui eſt la même choſe $v-\frac{2n\times v+r}{m+n}$, & $r-\frac{2m\times v+r}{m+n}$. D'où l'on tire

tire cette Regle générale, que pour avoir la vîteſſe de ces corps après le choc, il faut faire: *La ſomme de ces corps eſt au double de l'un ou de l'autre, ainſi la ſomme des viteſſes ou leur viteſſe reſpective, eſt à une viteſſe telle, qu'étant ôtée de la viteſſe de l'un ou de l'autre de ces corps avant le choc, le reſte ſera la viteſſe de ce même corps après le choc.* Ce qu'il falloit démontrer.

Il eſt évident, 1°. que ſi mv eſt moindre que $nv+2nr$, & ſi nr eſt moindre que $mr+2mv$, les corps m & n réjailliront: que s'il arrive le contraire, ils ſe mouvront du même côté d'où ils ſont venus; & ſi ces grandeurs ſont égales, ils demeureront en repos. L'on en va donner quelques exemples en nombres. Mais auparavant il eſt bon d'avertir que les lettres m & n ne ſervent qu'à deſigner les corps qui ſe choquent; que les chiffres qui ſe trouvent devant marquent le rapport des maſſes, & ceux qui ſont après marquent celui des vîteſſes. Ainſi 2 m 3 ſignifie qu'un corps a 2 de maſſe, & 3 de vîteſſe. Que s'il ne ſe trouve point de chiffre devant la lettre, on y ſouſentend toûjours l'unité; & s'il y a un o après, cela veut dire que le corps eſt en repos.

I. EXEMPLE.

Que $4m6$ & $3n4$ ſe choquent par des mouvemens contraires, on fera par la regle $4+3.6::6+4.\frac{6\times 6+4}{4+3}=\frac{60}{7}$, laquelle vîteſſe étant ôtée de 6, il reſtera $-\frac{18}{7}$, c'eſt à dire que m réjaillira avec $\frac{18}{7}$ de vîteſſe: faiſant de même

$4+3.\ 8::6+4.\ \frac{8\times\overline{6+4}}{4+3}=\frac{80}{7}$. Or $4-\frac{80}{7}=-\frac{52}{7}$; donc n réjaillira auſſi avec $\frac{52}{7}$ de vîteſſe. Auſſi dans ce cas mv eſt moindre que $nv+2nr$, & nr moindre que $mr+2mv$.

II. EXEMPLE.

Que $3m12$ & $2n2$ ſe choquent, on fera $5.\ 4::14.\ \frac{56}{5}$; or $12-\frac{56}{5}=\frac{4}{5}$; donc m continuera de ſe mouvoir du même côté avec $\frac{4}{5}$ de vîteſſe; auſſi mv eſt plus grande que $nv+2nr$. Pour le corps n on trouvera qu'il doit réjaillir avec $\frac{74}{5}$ de vîteſſe.

III. EXEMPLE.

Que $4m4$ & $2n2$ ſe choquent, on trouvera que le corps m après le choc demeurera en repos; car dans ce cas $mv=nv+2nr$. Pour le corps n il réjaillira avec 6 degrez de vîteſſe.

II. Il eſt évident, 2°. Que ſi un des corps comme n eſt en repos, il n'y a qu'à effacer dans la formule qui marque ſa vîteſſe après le choc, tous les termes où r ſe rencontre; ce qui donnera $\frac{2mv}{m+n}$ pour ſa vîteſſe après le choc, donc pour avoir la vîteſſe de ce corps, voici la Regle. *La ſomme des corps eſt au double du corps choquant; ainſi ſa vîteſſe eſt à la vîteſſe du choqué.*

Pour la vîteſſe du choquant on la trouvera par

par la formule égale à $\frac{mv - nv}{m+n}$, c'eſt à dire que pour avoir cette vîteſſe, il faut faire : *La ſomme des corps eſt à leur difference ; ainſi la vîteſſe du choquant avant le choc, eſt à ſa viteſſe après le choc.* Ce que l'on trouveroit encore par la Regle générale, en ôtant de v cette grandeur $\frac{2nv}{m+n}$.

Il eſt évident que ſi mv eſt plus grand que nv, le choquant continuera de ſe mouvoir du même côté ; ſi ce terme eſt plus petit, le corps réjaillira ; & s'il eſt égal, il demeurera en repos.

EXEMPLE.

Que $5m$ 12 choque $3n$ 0, l'on fera par la regle $5+3.10::12.\frac{10\times 12}{5+3}=15$; donc n ſe mouvra avec 15 degrez de vîteſſe. Pour avoir celle de m, on fera $5+3.5-3::12.\frac{12\times 5-3}{5+3}=3$, c'eſt à dire que ce corps ſe mouvra encore après le choc avec 3 degrez de vîteſſe.

Il eſt encore évident que ſi la maſſe du corps n eſt plus grande que celle de m, celui-ci réjaillira toûjours ; au contraire il continuera de ſe mouvoir après le choc s'il eſt plus grand.

III. Si les corps qui ſe choquent, ſe meuvent du même côté, l'on fera toûjours les mêmes raiſonnemens : car s'ils étoient mous, ils iroient de compagnie avec la ſomme de leurs mouvemens ; donc cette ſomme étant $mv+nr$, leur vîteſſe ſeroit $\frac{mv+nr}{m+n}$. Maintenant diſtribuant

réciproquement aux masses la difference de leurs vîtesses, qui est leur vîtesse respective, $v - r$, on aura pour la vîtesse de m, $\frac{nv - nr}{m+n}$ qui doit être negative à cause de la reaction de la matiere subtile : & pour celle du corps n, $\frac{mv - mr}{m+n}$ du même côté ; & ajoûtant ces vîtesses, on trouvera enfin pour la vitesse du corps m après le choc, $\frac{2nr + mv - nv}{m+n} = v + \frac{2n \times r - v}{m+n}$; & pour celle de n, $\frac{2mv + nr - mr}{m+n} = r + \frac{2m \times v - r}{m+n}$. D'où l'on peut tirer cette Regle générale.

La somme des corps qui se choquent par des mouvemens de même part, est au double de l'un ou de l'autre de ces corps, comme la difference de leurs vîtesses ou leur vîtesse respective, est à une vîtesse telle, qu'étant ôtée ou ajoûtée à la vîtesse de l'un ou de l'autre de ces corps avant le choc, le reste sera la vîtesse de ce même corps après le choc. Car $m + n. 2n :: v - r. \frac{2nv - 2nr}{m+n}$; & cette vîtesse étant ôtée de v, on aura $\frac{2nr + mv - nv}{m+n} = v + \frac{2n \times r - v}{m+n}$; faisant de même $m + n. 2m :: v - r. \frac{2mv - 2mr}{m+n}$, laquelle étant ajoûtée à la vîtesse r, donnera $\frac{2mv + nr - mr}{m+n} = r + \frac{2m \times v - r}{m+n}$. Il est facile de voir si le corps qui a le plus de vîtesse ou qui attrape l'autre, doit encore se mouvoir après le choc, s'il doit réjaillir, ou s'il doit demeurer en repos.

I. EXEM-

I. EXEMPLE.

Que 8 *m* 12 attrape 4 *n* 4, l'on fera par la regle $8+4.\ 8::12-4.\ \frac{8\times 12-4}{8+4}=\frac{16}{3}$; or $12-\frac{16}{3}=\frac{20}{3}$; donc *m* après le choc continuera de ſe mouvoir avec $\frac{20}{3}$ de vîteſſe. De même $8+4.\ 16::12-4.\ \frac{16\times 12-4}{8+4}=\frac{32}{3}$; mais $4+\frac{32}{3}=\frac{44}{3}$; donc *n* ſe mouvra avec $\frac{44}{3}$ de vîteſſe.

II. EXEMPLE.

Que *m* 24 attrape 3 *n* 4, on trouvera par la regle que *m* réjaillira avec 6 degrez de vîteſſe, & *n* continuera de ſe mouvoir avec 14.

Ces exemples ſont plus que ſuffiſans pour faire voir l'application de la Regle générale; mais pour en marquer la fécondité, voici un grand nombre de conſéquences qu'on en peut tirer, qui ſont autant de propoſitions démontrées par pluſieurs Auteurs qui ont traité cette matiere.

1. Les corps qui ſe choquent ont toûjours leur vîteſſe reſpective égale avant & après le choc. Car par la Regle générale * du choc des corps qui ſe rencontrent par des mouvemens contraires, on a trouvé après le choc $\frac{mv-nv-2nr}{m+n}$, & $\frac{nr-mr-2mv}{m+n}$ pour la vîteſſe de deux corps qui ſe choquent; mais ces viteſſes étant ajoûtées enſemble donnent $v+r$,

* *Art.* 1.

qui eſt la vîteſſe reſpective avant le choc; donc, &c. Il en eſt ainſi des autres cas.

2. Le centre de peſanteur de deux corps qui ſe ſont choquez, ſe meut toûjours avec la même vîteſſe avant ou après le choc; & ſi ce centre demeure en repos dans le mouvement qui précede le choc, il demeurera auſſi en repos après le choc. Cela eſt évident par l'article précedent. C'eſt ainſi qu'il faut entendre cette propoſition, que Dieu conſerve toûjours dans la nature une égale quantité de mouvement; non une égale quantité de mouvement abſolu, mais une égale quantité de mouvement de même part.

Il y a eu de grands Philoſophes & il y en a encore qui ſoûtiennent que Dieu conſerve toûjours une égale quantité abſolue de mouvement dans la nature, parceque tout autre principe leur paroît ne pouvoir s'accorder avec l'immutabilité de Dieu, ni avec les loix générales ſuivant leſquelles il a conſtruit & conſerve ce vaſte Univers: ce qui paroît d'abord très-vrai-ſemblable, & il n'y a guéres que l'experience qui en puiſſe faire voir la fauſſeté. Mais parceque les experiences que l'on a faites ſur les corps durs à reſſort, ne ſont pas d'accord avec ce principe, puiſque dans une infinité de chocs il y a du mouvement qui ſe perd & d'autre qui ſe rétablit, il a fallu en chercher un autre qui ne s'opposât ni à l'immutabilité divine ni aux experiences. Le R. P. *Malebranche* qui a donné des loix du mouvement, & qui avoit ſoûtenu ce ſentiment, examinant cette matiere de plus près, a enfin trouvé le dénouement de ce myſtere, en conſiderant que dans tous les chocs des corps, leur centre commun de peſanteur a toû-

toûjours avant & après le choc une égale vîteſſe. Voici comme ce grand Philoſophe s'explique. *Dans cette Propoſition*, Dieu conſerve toûjours dans l'Univers une égale quantité de mouvement, *il y a une équivoque qui fait qu'elle eſt vraie en un ſens, & fauſſe en un autre, conforme ou contraire à l'experience. Elle eſt vraie en ce ſens, que le centre de peſanteur de deux ou pluſieurs corps qui ſe choquent de quelque maniere que ce puiſſe être, ſe meut toûjours de la même vîteſſe avant & après le choc. De ſorte qu'il eſt vrai que Dieu conſerve toûjours une égale quantité de mouvement de même part, ou un égal tranſport de matiere. Par exemple lorſque* m 6 *choque* 5 m 0, *l'experience apprend qu'après le choc* m 6 *réjaillit* m 4, & 5 m 0 *avance* 5 m 2. *Or* 5 m 2 *ou* m 10 *en avant moins* m 4, *ou ce qui eſt la même choſe, plus* m 4 *en arriere, eſt égal à* m 6, *qui eſt la quantité de mouvement de même part, ou la même force qui étoit avant le choc. Ainſi cette propoſition*, Que Dieu conſerve toûjours une égale quantité de mouvement, *eſt vraie en ce ſens.*

Mais cette propoſition eſt fauſſe & contraire à l'experience priſe en ce ſens, que la ſomme du mouvement de chacun des corps, de quelque maniere qu'ils ſe choquent, ſoit après le choc égale à celle qu'ils avoient avant le choc, ou que la quantité abſolue de mouvement demeure toûjours la même. Car dans l'exemple ou l'experience précedente, avant le choc la quantité de mouvement n'étoit que m 6, *celle de* 5 m 0 *étant nulle: mais après le choc elle devient* m 14, *puiſque* 5 m 2, *ou* m 10 *plus* m 4 *eſt égal à* m 14. *Ainſi par le choc la quantité de mouvement priſe abſolument, c'eſt à dire ſans avoir égard aux ſens*

contraires dont les corps ſont mûs, augmente ou diminue ſans ceſſe.

Comme il en eſt de même dans une infinité d'autres exemples, l'on doit conclure que la Loi immuable que l'Auteur de la nature ſuit conſtamment dans la conſervation de ce monde viſible, eſt que dans tous les chocs des corps, il y ait toûjours une égale quantité de mouvement de même part, ou un égal tranſport de matiere. Mais les Metaphyſiciens ne manqueront pas de demander pourquoi Dieu obſerve pluiôt cette Loi, que celle de conſerver toûjours une égale quantité abſolue de mouvement, puiſque cela s'accorde également bien avec ſon immutabilité. L'on peut répondre que ſuivant cette derniere Loi, il n'y auroit pas cet équilibre ſi neceſſaire à la conſervation des corps dont ce monde eſt compoſé : car comme on ne ſauroit mouvoir un corps que par le choc d'un autre, le choc étant la cauſe occaſionnelle de la communication des mouvemens, il faut toûjours dans tous les mouvemens conſiderer deux ou pluſieurs corps, & les rapporter l'un à l'autre, puiſqu'ils agiſſent l'un ſur l'autre. Or comme c'eſt de leur centre commun de peſanteur que doit dépendre l'équilibre, c'eſt auſſi à ce centre auquel il faut avoir égard pour connoître le réſultat de leurs mouvemens. Ainſi il y aura toûjours équilibre lorſque ce centre aura avant & après le choc une égale vîteſſe, ou ce qui revient au même, que Dieu conſervera une égale quantité de mouvement de même part. Il faut donc dire que cette Loi *porte beaucoup plus le caractere des attributs divins* (ce ſont les paroles du P. Malebranche) *nonobſtant la varieté infinie des mouve-*

vemens des corps particuliers. Car le mouvement de tous les corps en général eſt toûjours le même, tout demeure, pour ainſi dire, dans un parfait & immuable équilibre. Il eſt clair que Dieu agit toûjours de la même maniere, avec uniformité, une parfaite ſimplicité, puiſqu'il obſerve ſans ceſſe cette Loi dans les chocs infinis des corps, que leur centre de peſanteur demeure en repos, ou ſe meuve toûjours nonobſtant le choc avec la même vîteſſe; & par conſéquent qu'il y ait toûjours dans toutes les parties de l'Univers priſes enſemble le même mouvement ou la même force, nonobſtant les mouvemens variables des corps particuliers neceſſaires pour perfectionner l'Univers, & pour exprimer la ſageſſe & les autres attributs du Créateur.

3. Si deux corps ſe choquent de nouveau avec la même vîteſſe qu'ils ont aquiſe après le premier choc, ils reprendront par ce nouveau choc la même vîteſſe qu'ils avoient avant le premier choc. Cela eſt évident.

4. Dans les corps qui ſe choquent, il ne ſe conſerve pas toûjours la même quantité de mouvement après le choc, mais elle peut augmenter ou diminuer. Soit un petit corps m choquant un grand $m+x$ en repos avec la vîteſſe v: on trouvera qu'après le choc la vîteſſe de $m+x$ ſera $\frac{2mv}{2m+x} = v - \frac{xv}{2m+x}$, & celle de m ſera $-\frac{xv}{2m+x}$; donc la quantité de mouvement après le choc ſera $\frac{2mmv+2mxv+mxv}{2m+x} = \frac{2mmv+3mxv}{2m+x} = mv + xv - \frac{xxv}{2m+x}$;

mais avant le choc elle étoit $m\ v$; donc elle eſt plus grande après le choc , parceque $\frac{x\,x\,v}{2\,m\,+\,x}$ eſt plus petite que $x\,v$.

Que ſi maintenant l'on faiſoit choquer ces mêmes corps avec les vîteſſes réſultantes du premier choc, ſavoir $m+x$ avec $\frac{2\,m\,v}{2\,m+x}$, & m avec $\frac{x\,v}{2\,m+x}$; comme * ces corps reprendroient les mêmes vîteſſes qu'ils avoient avant le premier choc, il eſt clair que la quantité du mouvement ſeroit diminuée.

5. Si deux corps égaux ſe choquent avec des vîteſſes égales ou inégales , ils feront échange de leurs vîteſſes après le choc , & réjailliront.

6. Si deux corps inégaux ſe choquent par des mouvemens contraires, & que leurs vîteſſes ſoient en raiſon inverſe de leurs maſſes; ils réjailliront après le choc avec la même vîteſſe qu'ils avoient avant le choc.

7. Si deux corps inégaux ſe choquent par des mouvemens contraires, & qu'après le choc ils aillent tous deux du même côté, ou que l'un demeure en repos, la ſomme de leurs quantitez de mouvement après le choc, ſera égale à la difference de celles qu'ils avoient avant le choc.

Exemple 1. Que $4\,m\ 12$, & $2\,n\ 4$ ſe choquent, on trouvera par la regle que le premier continuera de ſe mouvoir après le choc avec $\frac{4}{3}$ de vîteſſe , & que le ſecond réjaillira avec $\frac{52}{3}$.

* *Art.* 3. Or

Or $\frac{16}{3} + \frac{104}{3} = 40$ qui eſt la difference des quantitez de mouvement avant le choc; donc, &c.

Exemple 2. Si les corps qui ſe choquent ſont $4m8$ & $2n4$, le premier deviendra $4m0$, & le ſecond $-2n12$, c'eſt à dire que l'un demeurera en repos, & l'autre réjaillira avec 12 degrez de vîteſſe: or $32-8=24$; donc, &c.

8. Que ſi les corps réjailliſſent tous deux après le choc, la ſomme de leurs quantitez de mouvement après le choc ſera plus grande que la difference de celles qu'ils avoient avant le choc, & cette nouvelle difference ſera égale au double de la quantité de mouvement du corps auquel il en reſte le moins. Que $5m4$ & $3n2$ ſe choquent, le premier réjaillira $5m\frac{1}{2}$ & le ſecond $3n\frac{11}{2}$: Or $\frac{5}{2} + \frac{33}{2} = 19$, qui eſt la quantité du mouvement après le choc, la difference avant le choc étoit 14; donc $19-14=5$ eſt double de $\frac{5}{2}$.

9. Si un corps eſt triple d'un autre, & qu'ils ſe choquent avec des vîteſſes égales, le plus grand après le choc demeurera toûjours en repos, & le plus petit réjaillira avec une vîteſſe double de celle qu'il avoit avant le choc. Soient ces deux corps $9mv$ & $3mv$, on trouvera par la regle que le premier deviendra $9m0$, & le ſecond $-3m2v$.

10. Si deux corps ſe choquent par des mouvemens contraires, la vîteſſe qu'un des corps perdra eſt à celle qu'il perdroit s'il choquoit le même corps en repos, comme la ſomme des

vîteſſes eſt à la vîteſſe du corps choquant. Soient ces deux corps m & n qui ſe choquent d'abord par des mouvemens contraires avec les vîteſſes v & r, l'on trouvera par la regle que la vîteſſe que le corps m perdra ſera $\frac{2n \times v + r}{m + n}$; mais que ſi n étoit en repos, la vîteſſe que m perdroit ſeroit $\frac{2n \times v}{m + n}$. Or $\frac{2n \times v + r}{m + n} \cdot \frac{2n \times v}{m + n} :: v + r . v$; donc, &c.

11. Si deux corps ſe choquent par des mouvemens contraires, la vîteſſe que le plus fort perd par le choc du plus foible eſt égale à celle que ce même corps s'il étoit en repos recevroit du plus foible, & qu'il fût choqué avec une vîteſſe égale à la ſomme ou à la vîteſſe reſpective de ces corps. Soient ces deux corps m & n qui ſe choquent avec les vîteſſes v & r, la vîteſſe que le corps m perdra ſera $\frac{2n \times v + r}{m + n}$; ſi le corps m étoit en repos, & que le corps n le choquât avec la vîteſſe $v + r$, celle qu'il lui donneroit ſeroit la même; donc, &c.

12. Si deux corps inégaux ſe choquent avec des vîteſſes égales, le plus petit réjaillira toûjours. Pour le plus grand, quelquefois il continuera ſon mouvement, quelquefois il réjaillira, & quelquefois il demeurera en repos; ce qui eſt évident par la regle générale.

13. Si deux corps ſe choquent, les produits faits de la grandeur ou des maſſes de ces corps par les quarrez de leurs vîteſſes, étant ajoûtez enſemble, feront des ſommes égales devant & après le choc. Il n'y a qu'à en faire le calcul pour en être convaincu.

15. Si

14. Si un corps quelque petit qu'il ſoit & quelque vîteſſe qu'il ait, en choque un autre en repos quelque grand qu'il ſoit, il lui communiquera toûjours du mouvement: car par la regle il communiquera toûjours quelque vîteſſe au grand; à quoi il faut ajoûter que le grand étant en repos, n'a point de force pour reſiſter au mouvement, puiſque la force d'un corps eſt le produit de ſa maſſe par ſa vîteſſe.

15. Si un corps en rencontre un autre égal & en repos, il lui communiquera toute ſa vîteſſe, & il reſtera en repos.

16. S un corps en choque un plus petit en repos, il lui donnera toûjours une plus grande vîteſſe que la ſienne; mais elle ſera toûjours moindre que le double de la ſienne. Soit le corps $m+x$ choquant avec la vîteſſe v le plus petit m en repos, ſa vîteſſe après le choc ſera $\frac{2mv+2xv}{2m+x} = v + \frac{xv}{2m+x}$. Or cette vîteſſe eſt plus grande que celle du choquant, mais moindre que $2v$; donc, &c.

17. Si un corps en choque un autre plus petit en repos, & que la vîteſſe du choquant ſoit égale à la ſomme des maſſes de ces corps, le petit après le choc aura une vîteſſe égale au double de la maſſe du grand, & celle que le grand perdra ſera double de la maſſe du petit. Soit $5m8$ choquant $3m0$, le premier après le choc deviendra $5m2$, & le choqué deviendra $3m10$; donc, &c.

18. Que ſi c'eſt le petit corps qui rencontre le plus grand en repos, & que la vîteſſe du petit ſoit égale à la ſomme des maſſes des deux corps, le grand après le choc aura une vîteſſe, double de la maſſe du petit, & par conſéquent cel-

celle que le petit perdra ſera auſſi double de la maſſe du grand. Ce qui eſt évident.

19. Si un corps en rencontre un autre plus grand que lui en repos, il lui donnera une vîteſſe moindre que la ſienne, & il réjaillira toûjours. Que m choque $m+x$ avec la vîteſſe v, celle qu'il lui communiquera ſera $\frac{2mv}{2m+x} = v - \frac{xv}{2m+x}$, & celle qui lui reſtera ſera toûjours negative; donc, &c.

20. La vîteſſe qu'un grand corps donneroit à un petit corps en repos, eſt à celle que ce petit corps donneroit au grand s'il étoit en repos, les vîteſſes des choquans étant égales, en même raiſon que la maſſe du grand eſt à la maſſe du petit. Car ſoit mv choquant no, la vîteſſe de no ſera $\frac{2mv}{m+n}$. Que ſi nv choque mo, ſa vîteſſe ſera $\frac{2nv}{m+n}$. Or ces vîteſſes ſont comme m à n; donc, &c.

21. Si un même corps en choque un autre en repos avec deux vîteſſes inégales, les vîteſſes que le corps choqué aquerera ſeront en même raiſon que celle du corps choquant. Ce qui eſt évident.

22. Si un même corps choque l'un après l'autre deux corps inégaux en repos avec des vîteſſes égales, les vîteſſes que ces corps recevront ſeront réciproquement proportionnelles à la ſomme du choquant & de quelqu'un des choquez. Soient ces trois corps m, n, p, dont les deux derniers ſont en repos, & que v exprime la vîteſſe de m, la vîteſſe du corps n après

le

le choc ſera $\frac{2mv}{m+n}$, celle du corps p ſera $\frac{2mv}{m+p}$. Or ces vîteſſes ſont comme $m+p$ à $m+n$; donc, &c.

23. Si un corps en choque deux autres inégaux & en repos, & qu'il leur communique des vîteſſes égales, les vîteſſes du choquant doivent être entr'elles comme la ſomme du choquant & de quelqu'un des choquez. Soient encore ces trois corps m, n, p. On aura (en ſuppoſant les vîteſſes du choquant x & y) pour la vîteſſe du corps n, $\frac{2mx}{m+n}$, & pour celle de p, $\frac{2my}{m+p}$. Or par la ſuppoſition ces deux vîteſſes doivent être égales, donc $\frac{2mx}{m+n} = \frac{2my}{m+p}$, donc $x.y::m+n.m+p$; donc, &c.

24. Si deux corps inégaux en frapent un autre en repos avec la même vîteſſe, les vîteſſes qu'ils lui communiqueront ſeront en raiſon compoſée de la raiſon des corps choquans, & de la raiſon réciproque de ces mêmes corps plus le corps choqué. Que m & n choquent p en repos avec la vîteſſe v, la vîteſſe de p choqué par m ſera $\frac{2mv}{m+p}$, & choqué par n ſera $\frac{2nv}{n+p}$. Or $\frac{2mv}{m+p}$. $\frac{2nv}{n+p}$ :: $\overline{m \times n+p}$. $\overline{n \times m+p}$; donc, &c.

25. Si un corps en choque un autre en repos, & qu'après le choc ils avancent tous deux du même côté, ou que le choquant demeure en repos, les quantitez de mouvement ſeront égales avant ou après le choc. Par exemple, que $5m3$ choque $3n0$, le premier après le choc deviendra $5m\frac{3}{4}$ & le ſecond $3n\frac{15}{4}$; donc les quan-

quantitez de mouvement ſont égales avant & après le choc. Que ſi $4m4$ choque $4n0$, le premier demeurera en repos, & le ſecond ſe mouvra avec 4 degrez de vîteſſe; donc, &c. Mais ſi le choquant réjaillit, la quantité de mouvement de celui qui s'avance ſera plus grande que celle du choquant avant le choc, & la difference ſera égale à la quantité de mouvement avant le choc, du corps qui réjaillit. Car que $3m8$ choque $9n0$, la quantité de mouvement eſt 24; mais $9n0$ devient $9n4$, & $3m8$ devient $-3m4$. Or $36 - 12 = 24$; donc, &c.

26. Si pluſieurs boules égales ſont rangées de ſuite, & qu'une autre boule égale choque la premiere, la derniere ſeule en recevra la vîteſſe, & les autres demeureront en repos. Que s'il y en a deux qui ſe meuvent enſemble, & qui en choquent une ſuite qui ſe touchent, il n'y aura que les deux dernieres qui aquereront du mouvement, les autres demeureront en repos. Que s'il y en a trois qui ſe meuvent enſemble, il y en aura trois de celles qui ſe touchent qui recevront du mouvement, & ainſi de ſuite. Ce qui eſt évident par la regle.

27. Si trois corps inégaux m, n, p, ſont tels que m ſoit plus grand que n, & n plus grand que p, & que n & p ſoient en repos; je dis que le corps p étant mis en mouvement par m par l'entremiſe du corps n, recevra une plus grande vîteſſe qne s'il étoit choqué immédiatement par m.

Aiant nommé le premier corps m & ſa vîteſſe v, on prendra $m - x$ pour le ſecond, & $m - x - y$ pour le troiſiéme. Maintenant on fera par la regle $2m - x. 2m :: v.$

$2mv$

$\frac{2mv}{2m-x}$ vîteſſe de n choqué par m; enſuite $2m-x-y.\ 2m :: v.\ \frac{2mv}{2m-x-y}$ vîteſſe de p choqué auſſi par m; enfin $2m-2x-y.\ 2m-2x :: \frac{2mv}{2m-x}.\ \frac{2mv\times 2m-2x}{2m-x\times 2m-2x-y}$ qui eſt la vîteſſe du corps p choqué par n avec la vîteſſe qu'il a reçûe du corps m. Et diviſant cette grandeur haut & bas par $2m-2x$, on aura $\frac{2mv}{2m-x-y-\frac{xy}{2m-2x}}$. Or il eſt viſible que cette fraction eſt plus grande que $\frac{2mv}{2m-x-y}$ qui étoit la vîteſſe de p choqué immédiatement par m; donc, &c. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Que ſi l'on ſuppoſe que le corps m qui eſt le plus grand ſoit en repos, & que p choquant n, ce corps n avec la vîteſſe qu'il a reçûe de p aille fraper le corps m; on démontrera de la même maniere que m aquerera plus de vîteſſe étant ainſi choqué, que s'il l'étoit immédiatement par p. Il eſt donc évident qu'un corps en repos reçoit moins de vîteſſe d'un autre corps plus grand ou plus petit, s'il en eſt choqué immédiatement, que s'il étoit choqué par l'entremiſe d'un troiſiéme de moienne grandeur.

28. Si le corps du milieu eſt moien proportionnel entre les deux autres, je dis que le troiſiéme corps aquerera une plus grande vîteſſe étant choqué par le moien qu'on ſuppoſe avoir été frapé par le premier, que s'il étoit choqué de la même maniere par tout autre corps. Car ſuppoſant encore les trois corps m, n, p, & cher-

cherchant quel raport le corps du milieu n doit avoir aux deux autres, afin que la vîteſſe de p choqué par m par l'entremiſe de n, ſoit la plus grande qu'il eſt poſſible; on trouvera par la regle que la vîteſſe du corps n choqué par m avec la vîteſſe v ſera $\frac{2mv}{m+n}$; que celle de p choqué auſſi par m ſera $\frac{2mv}{m+p}$; enfin que celle de p choqué par n avec la vîteſſe que m lui a communiquée ſera $\frac{4mnv}{nn+mn+mp+np}$, qui doit être un plus grand. Prenant donc ſuivant la regle *de la* 3. *Section de l'Anal. des Infiniment petits*, la difference de cette fraction dans laquelle il n'y a que n de variable, & l'égalant à zero, on en tirera cette égalité $nn = mp$; donc $m.n :: n.p$; donc le corps n doit être moien proportionnel entre m & p, afin que p aquiere la plus grande vîteſſe poſſible. *Ce qu'il falloit démontrer.* Ces deux derniers articles avoient déja été donnez par M. *Saurin* dans un *Journal des Savans*, en ſuppoſant la regle générale lorſqu'un corps eſt en repos, démontrée par M. *Huygens*.

29. Il eſt évident que plus on interpoſera de corps, & plus on augmentera la vîteſſe du dernier, & que cette vîteſſe ſera toûjours la plus grande qu'il eſt poſſible, ſi tous ces corps ſont en progreſſion geometrique. Par exemple; ſi l'on donne 100 corps diſpoſez par ordre en progreſſion double, & que le mouvement commence par le plus grand, on trouvera après en avoir fait le calcul, que la vîteſſe du plus petit eſt à celle qu'avoit le plus grand avant le choc, comme 1476000000 eſt à 1. Que ſi c'eſt le plus petit qui commence à ſe mouvoir, cette

te vîteſſe ſera augmentée en raiſon de 1 à 1677000000000. C'eſt-là un des paradoxes les plus ſurprenans, dont la découverte eſt dûe à M. *Huygens*.

30. Si deux corps égaux étant mûs du même côté avec des vîteſſes inégales, ſe choquent, ils continueront toûjours de ſe mouvoir du même côté, mais ils feront échange de leurs vîteſſes: ce qui eſt évident par la regle.

31. Si un corps en rencontre un autre plus petit mû du même côté, la vîteſſe qu'il aquerera ſera plus grande que celle du grand avant le choc; & celle que le grand conſervera ſera auſſi plus grande que celle du petit avant le choc. Soient ces deux corps $m+x$ & m qui ſe meuvent du même côté avec les vîteſſes v & r; on fera par la regle $2m+x.\ 2m+2x::v-r.$ $\frac{2m+2x\times v-r}{2m+x}$, qui eſt la vîteſſe que le grand donnera au plus petit. Ajoûtant donc cette vîteſſe avec r, on aura pour la vîteſſe du petit après le choc $v+\frac{xv-xr}{2m+x}$ qui eſt plus grande que v. Et pour avoir celle du grand, on fera $2m+x.\ 2m::v-r.\ \frac{2mv-2mr}{2m+x}$, laquelle étant ôtée de v, donnera pour celle du grand après le choc $r+\frac{xv-xr}{2m+x}$, qui eſt plus grande que r; donc, &c.

32. Que ſi c'eſt le plus petit qui en rencontre un plus grand mû du même côté, la vîteſſe que le grand aura après le choc ſera plus petite que celle du petit; mais pour le petit quelquefois il continuera ſon mouvement avec une vîteſſe plus

plus petite que celle du grand avant le choc; quelquefois il demeurera en repos, & quelquefois il réjaillira. Cela eſt évident par la regle, & il eſt inutile d'en donner des exemples.

33. Si deux corps ſe choquent en ſe mouvant de même part, la vîteſſe que le corps qui en a le moins reçoit de celui qui en a le plus, eſt égale à celle qu'il recevroit s'il étoit en repos, & qu'il fût choqué par le même corps avec une vîteſſe égale à la difference des vîteſſes de ces deux corps: car ſi ces deux corps ſont m & $m - x$, & leurs vîteſſes v & r; on trouvera dans les deux cas que la vîteſſe que le plus petit reçoit du plus grand eſt $\frac{2mv - 2mr}{2m - x}$.

34. Si deux corps ſe choquent en ſe mouvant de même part, la vîteſſe que le plus grand communiquera au plus petit, eſt à celle qu'il lui communiqueroit s'il étoit en repos en même raiſon que la difference des vîteſſes eſt à la vîteſſe du plus grand avant le choc. Ce qui eſt évident.

35. Si un corps en choque un autre mû du même côté, la ſomme des quantitez de mouvement des deux corps après le choc ſera la même qu'avant le choc, s'ils avancent tous deux, ou ſi celui qui a le plus de vîteſſe demeure en repos. Mais ſi celui qui attrape l'autre réjaillit, la quantité de mouvement de l'autre ſera plus grande que celle des deux corps avant le choc, & la difference ſera égale à la quantité de mouvement du corps réjailliſſant.

EXEMPLES.

1. Que 4 m 8 attrape 2 n 4, la quantité de mou-

vement eſt 40; mais après le choc 4 *m* 8 devient 4 *m* $\frac{16}{3}$ & 2 *n* 4, devient 2 *n* $\frac{28}{3}$; donc, &c.

2. Que *m* 12 attrape 3 *n* 4, la quantité de mouvement eſt 24; mais après le choc *m* 12 devient *m* 0, & 3 *n* 4 devient 3 *n* 8; donc, &c.

3. Enfin que 2 *m* 8 attrape 10 *n* 2, la quantité de mouvement ſera 36; mais après le choc 10 *n* 2 devient 10 *n* 4, 2 *m* 8 devient — 2 *m* 2, c'eſt à dire qu'il réjaillit avec deux degrez de vîteſſe. Or la quantité de mouvement du ſecond eſt 40 qui differe de 36, du nombre 4 qui eſt la quantité de mouvement du premier après le choc; donc, &c.

L'on réſoudra avec la même facilité une infinité d'autres queſtions ou de problêmes, que l'on pourra propoſer ſur cette matiere, & l'on ne s'y eſt peut-être que trop arrêté.

COMPARAISON

De diverſes Obſervations de l'Eclipſe du Soleil du 12 *Mai* 1706 *faites en diverſes Villes de l'*Europe.

PAR M. CASSINI le fils.

APRÈS avoir reçû de divers lieux les Obſervations de cette Eclipſe, nous les avons com-

* 17. Novembre, 1706.

comparées à l'Obſervation qui en a été faite à *Paris*, décrite dans la Figure par la methode que nous pratiquons ordinairement, pour déterminer la difference des meridiens entre *Paris* & les lieux où cette Eclipſe a été obſervée.

Parmi ces Obſervations il y en a pluſieurs qui ont été faites dans la bande de la terre où l'Eclipſe a été totale, comme *Montpellier*, *Arles*, *Marſeille*, *Geneve* & *Zurik*. Dans les autres endroits elle a été plus petite à proportion que ces lieux étoient plus éloignez de cette bande. Comme l'on ne put pas obſerver le commencement de l'Eclipſe à *Paris*, & qu'on ne l'apperçût qu'à $8^h\ 25'\ 38''$, auquel temps on jugea qu'il pouvoit y avoir environ 20 ſecondes qu'elle étoit commencée; l'on a ſuppoſé dans la Figure ſon commencement à $8^h\ 25'\ 20''$.

Nous ne nous ſommes pas contenté de déterminer la difference des meridiens par le commencement & par la fin de l'Eclipſe, dans leſquels il y a ſouvent quelque ambiguité; mais nous avons auſſi examiné celle qui réſulte des autres Phaſes dans les endroits où l'on a obſervé la quantité des doigts éclipſez afin d'avoir un plus grand nombre d'obſervations qui concourent à la détermination de la difference des meridiens.

Com-

Comparaiſon de l'Eclipſe obſervée à Montpellier *par Meſſieurs de la Societé Royale des Sciences.*

	A *Montpellier*	A *Paris* par la Figure.	Difference des meridiens entre *Paris* & *Montpellier.*
Commencement à	8h 21′	8h 16′ 10″	4′ 50″
Un doit.	8 25 37	8 21 25	4 12
Deux doits.	8 30 52	8 26 40	4 12
Trois doits.	8 36 11	8 31 45	4 26
Quatre doits.	8 41 11	8 37 0	4 11
Cinq doits.	8 46 10	8 42 15	3 55
Six doits.	8 51 34	8 47 40	3 54
Sept doits.	8 56 55	8 53 15	3 40
Huit doits.	9 2 33	8 58 35	3 58
Neuf doits.	9 8 19	9 4 20	3 59
Dix doits.	9 13 57	9 9 40	4 17
Onze doits.	9 19 52	9 15 20	5 32
Immerſion totale.	9 25 55	9 22 0	3 55
Cemmencement de l'Emerſion.	9 30 5	9 24 10	5 55
Onze doits.	9 36 50	9 30 30	6 20
Dix doits.	9 42 36	9 36 25	6 11
Neuf doits.	9 48 13	9 42 10	6 3
Huit doits.	9 54 2	9 48 0	6 2
Sept doits.	9 59 47	9 53 50	5 57
Six doits.	10 5 33	9 59 40	5 53
Cinq doits.	10 11 35	10 5 40	5 55
Quatre doits.	10 17 28	10 11 40	5 48
Trois doits.	10 23 17	10 17 40	5 37

Deux doits.	$10^h\ 29''\ 26'$	$10^h\ 23''\ 35'$	$5'\ 51''$
Un doit.	10 35 25	10 29 20	6 5
Fin de l'Eclipſe.	10 40 38	10 35 20	5 18

En prenant une moyenne entre ces differences, l'on aura la difference des meridiens entre *Paris* & *Montpellier* de $5'\ 5''$.

A Arles *par M.* Davizard.

	A *Arles.*	A *Paris* par la Figure.	Difference des meridiens entre *Paris* & *Arles.*
Commencement à	$8^h\ 28'\ 44''$	$8^h\ 16'\ 0''$	$6'\ 44''$
Quatre doits.	8 45 44	8 37 30	8 14
Cinq doits.	8 52 44	8 43 15	9 30
Onze doits.	9 24 44	9 16 0	8 45
Obſcuration totale.	9 30 44	9 21 50	8 54
Recouvrement de lumiere.	9 35 44	9 26 10	9 34
Dix doits.	9 45 44	9 37 10	8 24
Neuf doits.	9 51 44	9 43 0	8 44
Huit doits.	9 57 44	9 49 0	8 44
Sept doits.	10 3 44	9 54 50	8 55
Six doits.	10 8 44	10 0 40	8 4
Cinq doits.	10 15 45	10 6 45	9 0
Quatre doits.	10 21 45	10 12 40	9 5
Trois doits.	10 27 45	10 18 45	9 0
Deux doits.	10 33 15	10 24 30	8 45
Un doit & demi.	10 36 30	10 27 45	8 45
Fin de l'Eclipſe.	10 45 45	10 36 55	8 50

M. *Da-*

M. *Davizard* nous écrivit qu'il n'avoit pas obſervé exactement le commencement de l'Eclipſe, & qu'il falloit s'en tenir aux Obſervations ſuivantes. En prenant une moyenne entre les differences des meridiens qui réſultent de cette Obſervation, l'on aura la difference des meridiens entre *Paris* & *Arles* de 8′ 50″.

A Avignon *dans le College des Jeſuites.*

	A *Avignon.*	A *Paris* par la Figure.	Difference des meridiens entre *Paris* & *Avignon.*
Commencement à	8h 27′ 55″	8h 17′ 25″	10′ 30″
Un doit.	8 32 3	8 22 20	9 43
Deux doits.	8 36 10	8 27 25	8 45
Trois doits.	8 41 18	8 32 40	8 38
Quatre doits.	8 47 12	8 38 0	9 12
Cinq doits.	8 52 46	8 43 55	8 51
Six doits.	8 58 29	8 49 10	9 19
Sept doits.	9 4 20	8 54 40	9 40
Dix doits.	9 21 56	9 11 15	10 41
Onze doits.	9 26 24	9 16 50	9 34
Eclipſe totale.	9 33 47	9 22 50	10 57
Recouvrement de lumiere.	9 36 17	9 26 10	10 7
Onze doits.	9 43 10	9 32 20	10 50
Dix doits.	9 48 55	9 38 5	10 50
Neuf doits.	9 54 50	9 43 50	11 0
Huit doits.	9 59 20	9 49 30	9 50
Sept doits.	10 5 21	9 55 20	10 1
Six doits.	10 11 11	10 1 5	10 6
Cinq doits.	10 18 29	10 7 25	11 4
Quatre doits.	10 24 28	10 13 25	11 3
Trois doits.	10 30 5	10 19 30	10 35

Deux doits.	10 35 28	10 25 15	10 13
Un doit.	10 41 1	10 31 5	9 56
Fin de l'Eclipſe.	10 46 48	10 36 55	9 53

En prenant une moyenne entre les differences qui réſultent de cette Obſervation, l'on aura la difference des meridiens entre *Paris* & *Avignon* de 10′ 31″.

A Marſeille *par le Pere* Laval *& M.* Chazelles.

	A *Marſeille*	A *Paris* par la Figure.	Difference des meridiens entre *Paris* & *Marſeille.*
Commencement à	8h 28′ 43″	8h 17′ 0″	11′ 43″
Un doit.	8 33 50	8 22 15	11 35
Deux doits.	8 38 39	8 27 10	11 29
Trois doits.	8 44 10	8 32 40	11 30
Quatre doits.	8 49 44	8 38 5	11 39
Cinq doits.	8 54 4	8 43 5	10 59
Six doits.	8 59 54	8 48 50	11 4
Sept doits.	9 5 46	8 54 10	11 36
Huit doits.	9 11 54	8 59 50	12 4
Neuf doits.	9 16 54	9 5 0	11 54
Dix doits.	9 23 4	9 11 0	12 4
Onze doits.	9 28 21	9 16 30	11 51
Eclipſe totale	9 34 40	9 22 30	12 10
Recouvrement de lumiere.	9h 37′ 40″	9h 26′ 30″	11′ 10″
Onze doits.	9 43 41	9 32 30	11 11
Dix doits.	9 49 14	9 38 0	11 14
Neuf doits.	9 55 30	9 43 50	11 40
Huit doits.	10 0 4	9 49 30	10 34
Sept doits.	10 5 38	9 55 0	10 38
Six doits.	10 12 26	10 1 10	11 16

Cinq

Cinq doits.	10h	18′	6″	10h	7′	5″	11′	1″
Quatre doits.	10	23	36	10	13	0	10	36
Trois doits.	10	30	35	10	19	20	11	15
Deux doits.	10	36	5	10	25	0	11	5
Un doit.	10	42	35	10	31	0	11	35
Fin de l'Eclipſe.	10	47	30	10	36	50	10	40

En prenant une moyenne entre les differences qui réſultent de l'Obſervation de ces Phaſes, l'on aura la difference des meridiens entre *Paris* & *Marſeille* de 11′ 22″.

A Geneve *par Meſſieurs* Violier & Gautier.

	A Geneve.	*A Paris* par la Figure.	Difference des meridiens entre *Paris* & *Geneve.*
Immerſion totale.	9h 45′ 32″	9h 29′	16′ 32″
Recouvrement de la lumiere à	9 48 32	9 31 30	17 2

L'Obſervation de l'Immerſion totale & du recouvrement de lumiere s'accorde à 13 ſecondes près de celle que M. *Fatio* a faite à *Geneve* dans un autre endroit.

A Zurik *par M.* Scleuzer.

	A Zurik.	*A Paris* par la Figure.	Difference des meridiens entre *Paris* & *Zurik.*
Commencement à	8h 54′	8h 26′ 20″	27′ 40″
Le milieu.	9 58	9 33 50	24 10
Fin de l'Eclipſe.	11 12	10 47 20	24 40

Il y a apparence qu'il y a quelque erreur dans l'Obſervation du commencement de l'Eclipſe, & qu'il faut s'en tenir à celle de la fin qui s'accorde à quelques ſecondes près à celle du milieu de l'Eclipſe.

Le Soleil fut couvert à *Zurik* pendant quatre minutes, que l'on voyoit les étoiles de la premiere grandeur & Venus. L'obſcurité y fut ſi grande qu'on ne reconnoiſſoit pas les gens à quatre pas de diſtance. Le bord de la Lune paroiſſoit comme un anneau d'or, & la roſée tomba & mouilla les herbes.

A Strasbourg *par M.* Einſenſchmid.

	A *Strasbourg.*	A *Paris* par la Figure.	Difference des meridiens entre *Paris* & *Strasbourg.*
Commencement à	8h 49′ 38″	8h 27′ 55″	21′ 43″
Le milieu.	9 58	9 35 30	22 30
Fin de l'Eclipſe.	11 9 5	10 48 0	21 5

La grandeur de l'Eclipſe fut obſervée à *Strasbourg* de 11 doits 38 minutes.

A Genes *par M. le Marquis* Salvago.

	A *Genes.*	A *Paris* par la Figure.	Difference des meridiens entre *Paris* & *Genes.*
Fin de l'Eclipſe.	11h 9′ 23″	10h 43′ 40″	25′ 43″

Les nuages empêcherent d'obſerver exactement à *Genes* le commencement de l'Eclipſe & la plûpart des Phaſes.

A Mo-

A Modene *par le Pere* Fontana.

	A *Modene.*	A *Paris* par la Figure.	Difference des meridiens entre *Paris* & *Modene.*
Commencement à	8h 57′ 0″	8h 22′ 40″	34′ 20″

A Bologne *par Meſſieurs* Manfredi & Stancari.

	A *Bologne.*	A *Paris* par la Figure.	Difference des meridiens entre *Paris* & *Bologne.*
Commencement à	8h 58′ 50″	8h 22′ 50″	36′ 0″
Un doit.	9 4 5	8 28 10	35 55
Deux doits.	9 10 4	8 33 45	36 19
Trois doits.	9 15 14	8 39 10	36 4
Quatre doits.	9 20 50	8 44 40	36 10
Cinq doits.	9 26 48	8 50 25	36 23
Six doits.	9 32 15	8 56 5	36 10
Sept doits.	9 38 20	9 2 0	36 20
Huit doits.	9 43 42	9 7 40	36 2
Neuf doits.	9 49 40	9 13 30	36 10
Dix doits.	9 55 58	9 19 50	36 8
Onze doits.	10 3 10	9 26 45	36 29
Dix doits.	10 19 26	9 44 45	35 41
Neuf doits.	10 25 29	9 51 5	34 24
Huit doits.	10 32 10	9 57 10	35 0
Sept doits.	10 39 32	10 3 50	35 42
Six doits.	10 44 57	10 9 40	35 17
Cinq doits.	10 51 53	10 15 50	36 3
Quatre doits.	10 58 20	10 22 25	35 55
Trois doits.	11 3 56	10 28 40	35 16
Deux doits.	11 10 36	10 34 50	35 46
Un doit.	11 16 18	10 40 45	35 33
Fin de l'Eclipſe.	11 22 30	10 47 0	35 30

Cette Eclipſe fut obſervée à *Bologne* de 11 doits un tiers. Au temps de la plus grande obſcuration la lumiere du jour étoit fort pâle, & on pouvoit ſouffrir ſans incommodité à la vûe la lumiere du Soleil. En prenant une moyenne entre ces differences, l'on aura la difference des meridiens entre *Paris* & *Bologne* de 35′ 50″.

A Rome *par M.* Bianchini *aux* Thermes de Diocletien.

	A *Rome.*	A *Paris* par la Figure.	Difference des meridiens entre *Paris* & *Rome.*
Commencement à	8h 59′ 48″	8h 19′ 25″	40′ 23″
Un doit.	9 6 33	8 25 25	41 8
Six doits.	9 34 0	8 53 45	40 15
Sept doits.	9 41 15	8 59 55	41 20
Huit doits.	9 46 45	9 5 55	40 50
Neuf doits.	9 53 15	9 12 20	40 55
Dix doits.	10 1 15	9 20 5	41 10
Neuf doits.	10 27 0	9 46 20	40 40
Huit doits.	10 33 30	9 53 0	40 30
Trois doits.	11 7 0	10 25 40	41 20
Deux doits.	11 12 32	10 31 50	40 42
Fin de l'Eclipſe.	11 24 5	10 44 25	39 40

Le Soleil étoit éclipſé de dix doits 36 minutes à 10h 9′ 15″. Il ſe cacha enſuite dans les nuages, mais on jugea que l'Eclipſe n'avoit pas augmenté ſenſiblement. En prenant une moyenne entre *Paris* & *Rome* de 40′ 45″.

A Ma-

A Madrid *dans le College Imperial par le Pere* Caſſani *Jeſuite.*

	A *Madrid.*	A *Paris* par la Figure.	Difference des meridiens entre *Paris* & *Madrid.*
Commencement à	$7^h 43' 50''$	$8^h 6' 45''$	$22' 55''$
Fin de l'Eclipſe.	9 57 34	10 20 0	22 26

Le Soleil parut éclipſé à $8^h 44' 30''$ de onze doits & demi. L'Eclipſe augmenta encore pendant quelques minutes qu'on ne pût pas marquer. On fit l'Obſervation de cette Eclipſe avec un verre de 12 pieds qui repréſentoit l'image du Soleil dans une chambre obſcure, & l'on marquoit les minutes & les ſecondes à une Pendule reglée exactement au Soleil les trois jours précedens.

Depuis le rapport que nous avons fait à l'Academie de diverſes Obſervations de l'Eclipſe du Soleil du 12 *Mai* 1706, *nous en avons reçû pluſieurs autres faites en* Allemagne *qui nous ont été envoyées par M.* Einſenſchmid. *En voici le réſultat.*

A Nuremberg *par M.* Wulzelbaur.

	A *Nuremberg.*	A *Paris* par la Figure.	Difference des meridiens entre *Paris* & *Nuremberg.*
Commencement à	$9^h 6' 30''$	$8^h 32' 0''$	$34' 30''$
Fin de l'Eclipſe.	11 28 0	10 54 0	34 0

L'Eclipſe a été totale à *Nuremberg.*

A Neubourg *ſur le* Danube *par les PP. Jeſuites.*

	A *Neubourg.*	A *Paris* par la Figure.	Difference des meridiens entre *Paris* & *Neubourg.*
Commencement à	9h 6′ 20″	8h 30′ 30″	35′ 50″
Immerſion totale.	10 12 10	9 37 30	34 40
Recouvrement de lumiere.	10 15 33	9 40 50	34 43
Fin de l'Eclipſe.	11 26 20	10 52 40	33 40

A Jena *par M.* Hambergerus.

	A *Jena.*	A *Paris* par la Figure.	Difference des meridiens entre *Paris* & *Jena.*
Commencement à	9h 11′ 40″	8h 35′ 0″	36′ 40″
Fin de l'Eclipſe	11 32 18	10 56 25	35 53

La grandeur de l'Eclipſe fut obſervée à *Jena* de 11 doits $\frac{5}{6}$.

A Leipſik *par Meſſieurs* Rivinus & Junius.

	A *Leipſik.*	A *Paris* par la Figure.	Difference des meridiens entre *Paris* & *Leipſik.*
Commencement à	9h 14′ 9″	8h 35′ 45″	38′ 24″
Fin de l'Eclipſe.	11 37 31	10 58 0	39 31

A Zeitz

A Zeitz *par M.* Teuberus.

	A *Zeitz.*	A *Paris* par la Figure.	Difference des méridiens entre *Paris* & *Zeitz.*
Commencement à	9h 15′ 30″	8h 35′ 40″	39′ 50″
Fin de l'Eclipſe.	11 36 41	10 57 30	39 11

La grandeur de l'Eclipſe fut obſervée à *Zeitz* de 11 doits & demi.

A Berlin *par M.* Hofman.

	A *Berlin.*	A *Paris* par la Figure,	Difference des méridiens entre *Paris* & *Berlin.*
Commencement à	9h 24′ 20″	8h 39′ 45″	44′ 35″
Fin de l'Eclipſe.	11 45 27	11 1 0	44 27

La grandeur de l'Eclipſe fut obſervée à *Berlin* de 11 doits 52 minutes & demi.

A Breſlaw *par le P.* Heinrich.

	A *Breſlaw.*	A *Paris* par la Figure.	Difference des méridiens entre *Paris* & *Breſlaw.*
Commencement à	9h 39′ 40″	8h 39′ 45″	59′ 55″
Immerſion totale.	10 49 0	9 49 25	59 35
Recouvrement de lumiere.	10 50 0	9 51 10	58 50
Fin de l'Eclipſe.	12 2 20	11 4 0	58 20

DE L'ECLIPSE DE LUNE

Du 21 Octobre 1706 à l'Obſervatoire.

PAR Mrs. DE LA HIRE.

* LE Ciel a été couvert ici dans toute la durée de cette Eclipſe, & les gros pelottons de nuées qui paſſoient aſſez promptement, n'auroient pas empêché qu'on n'en eut obſervé pluſieurs phaſes, s'il n'y eut eu encore audeſſus une eſpece de gros brouillard, au travers duquel les corps lumineux paroiſſent comme cotonneux, enſorte qu'on ne peut voir leur diſque ni leurs parties bien terminées; ce qu'on remarque aſſez ſouvent en obſervant le Soleil, quoique ſon diſque paroiſſe aſſez net à la vûe ſimple.

Cependant nous avons obſervé avec le micrometre appliqué à une Lunette de 7 piés de foyer le diametre de la partie éclairée avec autant de juſteſſe qu'il nous a été poſſible, quoique les termes de l'ombre ne paruſſent qu'à peine dans les temps où l'on voioit la Lune le plus diſtinctement, dont nous avons tiré la quantité de l'Eclipſe, comme il ſuit.

Diametre de la partie éclairée.	*Quantité de l'Eclipſe.*	
H.	de degré.	Doits. Minutes.
à 6 37 [illegible] 15 0	5	9
[illegible] 15 50	6	18
		58.

* 17 Novemb. 1706.

	58.	15	0	6	36
7	17.	14	15	6	42
	23.	13	10	7	14

Le Ciel fut si couvert dans tout le reste de l'Eclipse que nous n'en pûmes plus rien observer, & à peine voioit-on un leger vestige du corps de la Lune par intervalles.

On ne pouvoit rien remarquer des taches dans le temps où le Ciel paroissoit plus découvert.

Un peu après l'Eclipse le Ciel devint assez clair, & nous observâmes le diametre de la Lune de 33′ 24″ à la hauteur de 46 degrez ½, d'où nous concluons que son diametre horizontal étoit de 33′ 0″.

OBSERVATIONS

Faites sur le Squelet d'une jeune femme âgée de seize ans, morte à l'Hôtel-Dieu de Paris *le* 22 *Fevrier* 1706.

PAR M. MERY.

AVIS.

* LEs parties de ce Squelet sont décrites dans leur situation naturelle; mais les figures représentent à gauche celles du côté droit, & celles du côté gauche à droit.

Premiere Observation. Le Squelet de cette femme n'a que trois pieds de haut ou environ.

* 20. Novemb. 1706.

Son peu de hauteur a pour cauſe la courbure de l'épine, & celle des os des cuiſſes & des jambes. Celle-ci eſt telle que la plante des pieds poſant à terre, les femurs ſe trouvent neceſſairement fléchis en devant; de ſorte que ces deux os ne contribuent en rien, ou très-peu à ſa hauteur. Delà vient auſſi que ce Squelet étant debout ſur ſes jambes, paroît comme s'il étoit aſſis: ce qui donne lieu de croire que cette femme gardoit pendant ſa vie une ſemblable poſture en marchant.

Cette conjecture paroît d'autant plus vrai-ſemblable que les os des cuiſſes & des jambes étant étendus, la plante des pieds de ce Squelet, au lieu de poſer à terre, comme elle devroit faire, ſi ces os n'étoient point courbez, ſe trouve au contraire tournée en arriere comme quand on eſt à genoux; ainſi il n'y a que l'extrémité de la derniere phalage des orteils de ce Squelet qui puiſſe toucher la terre; ſituation dans laquelle il étoit abſolument impoſſible que cette femme pût marcher. Sur cela voyez la ſeconde Figure.

Seconde Obſervation. Les os des cuiſſes de ce Squelet étant étendus, & ceux des jambes fléchis, il n'y a que la rotule avec la partie ſuperieure du tibia qui poſent à terre, parceque le demi-cercle que décrivent dans leur partie moyenne le tibia & le peroné, fait que ce Squelet étant appuyé ſur ces genoux, la partie inferieure de ſes jambes ſe trouve dans cette ſituation tournée en enhaut; delà vient que la plante des pieds regarde le ciel, au lieu d'être ſituée en arriere, comme elle ſe trouve dans les perſonnes à genoux, dont la conformation des os des jambes n'a rien de vicié.

De

De ces deux Obſervations on peut tirer ces deux conſéquences. Premierement, la plante des pieds de ce Squelet ſe trouvant tournée en deſſus quand ſes jambes ſont fléchies & ſes cuiſſes étendues, il étoit très-difficile à cette femme pendant ſa vie de ſe tenir à genoux.

Secondement, cette femme aiant été obligée de tenir ſes cuiſſes auſſi fléchies en marchant qu'étant aſſiſe, il eſt évident que ſa hauteur demeuroit la même dans ces deux ſituations. Mais s'appuiant ſur ſes genoux ſes cuiſſes étendues & ſes jambes fléchies, elle pouvoit ajoûter à ſa hauteur ce que le femur a de plus de longueur que le tibia, ce qui ne va pas à plus d'un pouce, en meſurant l'un & l'autre par une ligne droite; au lieu qu'elle l'auroit augmentée d'environ ſix pouces ſi elle avoit pû ſe tenir à genoux ſur la partie convexe des os de ſes jambes, ce qui n'étoit peut-être pas impoſſible; alors elle auroit parû plus grande en gardant cette poſture qu'en marchant. C'eſt ce qu'on remarque en effet par ſon Squelet en le mettant dans ces differentes ſituations.

Troiſiéme Obſervation. L'épine de ce Squelet, dont la courbure eſt la cauſe de la difformité de toutes les autres parties de ſon tronc, imite parfaitement bien par ſes differens contours la figure du corps d'un ſerpent qui rampe ſur la terre pour s'avancer en avant. Tous ces contours extraordinaires ſe font ſur les côtez de l'épine; ce qui n'empêche pas cependant les vertebres de former devant & en arriere les mêmes enfoncemens & les mêmes éminences qu'elles ont dans un Squelet dont l'épine n'a rien de difforme.

De la premiere vertebre du coû à la derniere, l'é-

l'épine eſt peu ſenſiblement cave du côté droit, & convexe du côté gauche; mais depuis la premiere vertebre du dos juſqu'à la derniere, l'épine eſt fort convexe du côté droit, ce qui fait que de ce côté-là le corps des vertebres eſt peu éloigné des côtes: mais parceque cette épine eſt fort concave du côté gauche, il y a entre les côtes & les vertebres une diſtance beaucoup plus grande. D'ailleurs la partie anterieure des vertebres du dos eſt un peu tournée du côté droit.

Au contraire les vertebres des lombes forment par leur aſſemblage une gibboſité très-grande du côté gauche, & une concavité du côté droit qui lui eſt proportionnée, & le devant de ces vertebres panche un peu du côté gauche.

Enfin l'os ſacrum joint au coxis paroît convexe du côté droit & concave du côté gauche, quoiqu'il garde outre cela ſa figure naturelle qui eſt d'être creux par devant & gibbe par derriere.

Quatriéme Obſervation. Ces differens contours que fait l'épine ſur ſes côtez, ſont cauſe de ce que la ſymphyſe du menton qui répond en ligne droite à celle des os pubis dans un Squelet bien formé, s'en trouve éloignée dans ce Squelet difforme de deux à trois pouces; delà vient que la face paroît un peu tournée ſur le côté gauche, & le baſſin de la cavité hypogaſtrique tourné ſur le côté droit. Cependant l'extrémité du coxis eſt directement oppoſée à la premiere vertebre du coû; de ſorte que malgré la grande obliquité de l'épine, le corps de cette femme ne panchoit point plus d'un côté que de l'autre; ce qui empêchoit qu'il ne parut, étant garni de ſes chairs & revêtu de ſa peau, auſſi contrefait que l'eſt le tronc de ſon Squelet.

Cin-

Cinquiéme Obſervation. Les vertebres du dos repouſſant du côté droit par leur convexité l'extrémité poſterieure des côtes ſuperieures, forment avec elles de ce côté-là une boſſe conſiderable par derriere ; delà vient que l'omoplate droit paroît fort relevé. La même convexité de ces vertebres fait auſſi que les côtes du même côté décrivent en dedans par leur partie poſterieure un arc fort courbé, ce qui rend la capacité de la poitrine beaucoup plus petite du côté droit que du côté gauche.

Mais parceque les mêmes vertebres du dos entraînent avec elles au dedans de leur courbure les côtes gauches qui leur ſont articulées, delà vient que l'omoplate gauche paroît de ce côté-ci applati ſur le dos, & que les côtes gauches décrivent un arc beaucoup plus ouvert que n'eſt celui des côtes droites, ce qui rend la capacité gauche de la poitrine beaucoup plus vaſte que la droite. C'eſt encore cette même courbure des vertebres du dos qui eſt cauſe que le ſternum décrit une ligne un peu oblique ſur le devant de la poitrine, au lieu d'y décrire une ligne droite comme il fait ordinairement.

Sixiéme Obſervation. Comme les vertebres des lombes forment au contraire une convexité fort grande du côté gauche, & une concavité très-conſiderable du côté droit ; delà vient que l'eſpace qui ſe trouve entre les fauſſes côtes, les os des iles & ces vertebres eſt beaucoup plus grand du côté droit que du côté gauche ; ce qui rendoit la capacité du ventre de cette femme plus petite du côté gauche que du côté droit.

Septiéme Obſervation. Mais parceque la courbure que forme l'os ſacrum avec le coxis eſt faite dans un ſens contraire à celle des vertebres

bres des lombes, l'eſpace qui ſe rencontre entre ces os & l'iſchium, eſt par cette raiſon plus petit du côté droit que du côté gauche.

Par toutes ces obſervations il eſt facile de voir que toute la difformité du tronc du Squelet de cette femme ne peut avoir d'autre cauſe que la courbure des vertebres : mais il eſt difficile de trouver celle des contours contraires que fait l'épine par le moien de leur aſſemblage. Tâchons cependant de la découvrir.

Huitiéme Obſervation. De ce que les vertebres ont un peu plus d'épaiſſeur du côté que l'épine eſt convexe que de ſon côté concave, il ſemble d'abord qu'il n'eſt rien de ſi aiſé que d'expliquer ſa courbure par ce plus & moins d'épaiſſeur ; cependant ſi l'on fait reflexion que cette épaiſſeur n'eſt point une cauſe efficiente, on concevra ſans peine que l'épine n'a pû par ſon moyen ſe contourner ſur ſes côtez en ſens contraires ; ainſi l'on reconnoîtra qu'il eſt impoſſible de rendre raiſon de ſes differens contours par ce plus & moins d'épaiſſeur des vertebres, & qu'il faut neceſſairement avoir recours à la ſeule contraction des muſcles racourcis de l'épine pour expliquer ſa differente courbure ; parceque le relâchement de ſes muſcles allongez, & le plus & le moins d'épaiſſeur des vertebres ne peuvent être que des effets de ſes muſcles racourcis, comme je le ferai voir par la ſuite de ces Obſervations.

Neuviéme Obſervation. Quand l'épine a ſa figure reguliere, & que tous ſes muſcles agiſſent enſemble en même temps avec force égale de part & d'autre, ils la flechiſſent ſeulement en arriere, & ne lui font décrire qu'une ſeule ligne courbe ; de ſorte que dans cette diſpoſition des muſ-

muſcles l'épine ne peut pancher d'un côté ni d'autre. Mais s'il arrive que tous les muſcles du côté droit entrent en contraction, & que tous ceux du côté gauche tombent dans le relâchement ; alors l'épine ſe flechit toute entiere du côté droit. Le contraire ſuccede quand après cela tous les muſcles du côté gauche ſe contractent, & que ceux du côté droit ſe relâchent.

Or comme l'ame preſide aux mouvemens de tous les muſcles de l'épine en faiſant couler tantôt dans les uns & tantôt dans les autres les eſprits animaux qui les gonflent, il eſt évident que les nerfs qui donnent paſſage à ces eſprits dans les muſcles de l'épine, doivent être tous parfaitement libres & également ouverts de part & d'autre quand ſes muſcles la flechiſſent en arriere, à droit & à gauche alternativement.

Dixiéme Obſervation. Quand donc l'épine demeure conſtamment flechie de l'un ou de l'autre côté, il faut neceſſairement que le cours des eſprits animaux dans ſes muſcles ne ſoit plus ſoûmis à la direction de l'ame, & qu'une partie de ſes nerfs ſouffre quelque obſtruction, pendant que l'autre reſte libre. Il doit donc couler tout naturellement dans celle-ci plus d'eſprits que dans l'autre ; donc les muſcles de l'épine qui en reçoivent une plus grande quantité doivent en ſe gonflant s'acourcir & tenir toûjours l'épine flechie de leur côté.

Par ce ſyſtême ſi vrai-ſemblable il eſt aiſé & de rendre raiſon de la figure irréguliere de l'épine, & de faire voir que l'extenſion de ſes muſcles relâchez, & l'épaiſſeur des vertebres plus petite d'un côté que de l'autre ſont uni-

que-

quement l'effet de la contraction de ſes muſcles racourcis. Ce que je vais démontrer.

Comme je n'ai jamais vû d'enfant venir au monde avec une épine contournée, je ſuppoſe que cette femme a paſſé quelque temps de ſa vie aiant l'épine à l'ordinaire: mais qu'étant arrivé quelque obſtruction dans ſes nerfs, ſes muſcles ſe ſont plus contractez d'un côté que de l'autre. Or comme depuis cette obſtruction l'épine de cette femme a toûjours gardé la figure contournée qu'on remarque dans ſon Squelet, & qu'il n'a point été en ſon pouvoir de la redreſſer, il eſt évident que l'ame n'a pu pouſſer aſſez d'eſprits dans les muſcles étendus de l'épine pour ſurmonter la réſiſtance de ſes muſcles racourcis; parceque les nerfs de ceux-ci aiant toûjours reſté ouverts, ſes muſcles contractez ont reçû inceſſamment beaucoup plus d'eſprits que ſes muſcles relâchez, les nerfs de ceux-là étant toûjours demeuré fermez. Donc les muſcles racourcis de l'épine la tenant par leur contraction permanente inflexiblement fléchie de leur côté, ils ont dû premierement tenir les muſcles qui leur ſont oppoſez dans une perpetuelle extenſion. Secondement ils ont toûjours preſſé les vertebres moins dures qu'à l'ordinaire les unes contre les autres, & empêché par conſéquent leur corps de s'étendre du côté de leur racourciſſement, & en les écartant de l'autre leur permettre de s'épaiſſir davantage du côté des muſcles relâchez. Donc l'extenſion des muſcles allongez de l'épine, & l'épaiſſeur du corps des vertebres plus grande d'un côté que de l'autre, ne peuvent être que l'effet de la contraction de ſes muſcles racourcis. La contraction permanente & involontaire

re de ces muſcles eſt donc l'unique cauſe efficiente de la courbure extraordinaire de l'épine.

Car il n'y a pas d'apparence que la peſanteur du corps ait pû y avoir part; parceque la peſanteur ne pouvant faire pencher le corps que du côté qu'elle ſe trouve plus grande, elle n'auroit pû faire décrire à l'épine que d'un côté ſeulement une ſeule courbure, & éloigner par conſéquent la tête de la ligne perpendiculaire qu'elle décrit avec l'os ſacrum, les os des iles demeurant immobiles ſur les deux jambes.

Or comme l'épine du Squelet de cette femme forme ſur ſes côtez dans l'étendue de ſa longueur quatre lignes courbes toutes oppoſées les unes aux autres en ſens contraires, & que le coxis répond cependant en ligne droite à la premiere vertebre du coû malgré cette irrégularité, il ne paroît donc nullement vrai-ſemblable que la peſanteur du corps ait pû cauſer ces differens contours de l'épine. Il n'en eſt pas de même de la courbure des os des cuiſſes & des jambes que je vais examiner.

Onziéme Obſervation. Les deux femurs décrivent chacun preſqu'un demi-cercle, dont la partie convexe eſt ſituée ſur le devant, & la concave ſur le derriere de ces os. Mais parceque l'un & l'autre ſe jettent en dehors, l'eſpace qui eſt entr'eux ſe trouve beaucoup plus grand dans leur milieu qu'entre leurs extrémitez.

Le tibia & le peroné de chaque jambe forment la même figure que les deux femurs (ce qui eſt aſſez mal repréſenté, à moins que la perſpective ne le demande, comme le Deſſinateur le prétend) mais avec cette difference que la partie convexe du demi-cercle qu'ils décrivent

vent ſe porte en dedans, & la concave en dehors ; de ſorte que les deux tibia ſe touchent preſque par leur milieu, & qu'ils ſont fort écartez l'un de l'autre par leurs extrémitez, ce qui fait que les pieds qui n'ont rien de difforme ſe jettent en dehors. De plus le tibia & le peroné ſont applatis conſiderablement ſur les côtez dans leur partie moienne, & un peu tortus dans toute leur longueur.

Après avoir décrit la figure irréguliere de ces os, faiſons voir à preſent que la peſanteur du corps de cette femme jointe à leur peu de ſolidité, a beaucoup contribué à leur courbure.

Douziéme Obſervation. Si l'on fait attention, que les pieds de ſon Squelet poſant à plomb ſur un plancher, les os des cuiſſes ſe trouvent neceſſairement flechis en devant, ce qui fait que ce Squelet paroît aſſis quoiqu'il ſoit debout, on concevra aiſément qu'il n'y a eu que la ſeule peſanteur du corps qui ait pû forcer les cuiſſes de cette femme à demeurer fléchies en marchant. Car l'on ne peut pas dire que pour les tenir en cet état leurs muſcles flechiſſeurs ſoient demeurez dans une perpetuelle contraction comme ceux de l'épine, puiſque cette femme aiant pû pendant ſa vie ſe mettre à genoux, il eſt évident que ces muſcles ont dû ſe relâcher pour donner lieu à leurs antagoniſtes d'étendre les cuiſſes, ſans quoi il eût été abſolument impoſſible à cette femme de prendre cette poſture.

Il y a même bien de l'apparence, chaque femur décrivant un arc convexe en devant & concave par derriere, que la contraction des muſcles extenſeurs des cuiſſes a toûjours été plus forte que celle de leurs flechiſſeurs, autrement

trement les femurs n'auroient pû ainſi ſe courber.

Mais parceque les jambes ſe flechiſſent en arriere, & que leurs os décrivent des arcs ſemblables à ceux des cuiſſes tant par leur figure que par la ſituation de leurs parties, il paroît fort vrai-ſemblable que la contraction des muſcles flechiſſeurs des jambes a dû être au contraire plus forte que celle de leurs extenſeurs.

Cependant il faut bien obſerver que ni la peſanteur du corps ni la contraction des muſcles des cuiſſes & des jambes n'auroient jamais pû cauſer la courbure du femur, du tibia & du peroné, ſi ces os euſſent eu aſſez de dureté pour réſiſter à l'impreſſion de ces ceux cauſes, leur peu de ſolidité a donc contribué en quelque façon à les flechir. Auſſi voit-on que ni la peſanteur du corps ni la contraction des muſcles ne produiſent point cet effet quand la réſiſtance de ces os ſurpaſſe l'effort de ces deux cauſes.

Il faut encore remarquer que la peſanteur du corps & la moleſſe des os ne peuvent être que des cauſes occaſionelles de leur courbure, puiſqu'il n'y a que la contraction des muſcles des cuiſſes & des jambes plus forte d'une part de l'autre qui ait pû déterminer le femur, le tibia & le peroné à ſe flechir plutôt en arriere qu'en devant.

La courbure des os des bras à laquelle il eſt certain que la peſanteur du corps n'a pû contribuer, eſt une preuve évidente de cette verité; d'où je conclus enfin que la contraction des muſcles plus forte d'un côté que de l'autre, eſt l'unique cauſe efficiente de la courbure des os.

Je

Je dis que la contraction des muſcles doit être plus forte d'une part que de l'autre pour flechir les os mêmes; parceque quand les muſcles antagoniſtes d'une partie agiſſent avec force égale, ils maintiennent les os dans leur figure naturelle, malgré leur moleſſe & la peſanteur du corps.

A l'égard de l'applatiſſement des os des cuiſſes & des jambes, comme il ne paroît pas qu'il puiſſe être rapporté à aucune des cauſes dont j'ai parlé, il y a lieu de croire qu'il ne peut être que l'effet d'une vicieuſe conformation.

COMPARAISON

De l'Obſervation de l'Eclipſe de Lune arrivée en Avril 1706, *& faite dans l'Iſle de S.* Domingue *en* Amerique, *avec celle qui a été faite à l'Obſervatoire Royal à* Paris.

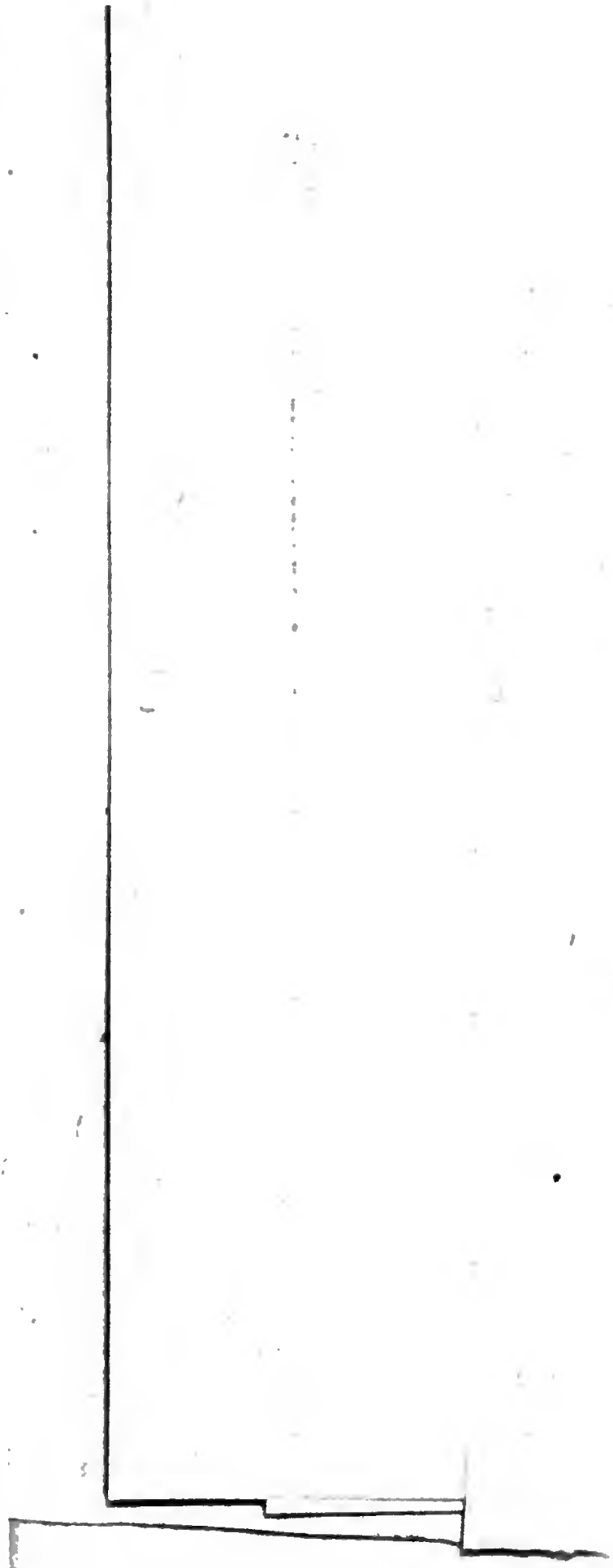
PAR M. DE LA HIRE.

* LE Pere *Gouye* communiqua à l'Academie Samedi dernier une Obſervation de l'Eclipſe de Lune du mois d'Avril de cette année, laquelle avoit été faite au Port de *Pei* dans l'Iſle de S. *Domingue* en *Amerique*.

Cette Obſervation porte que la Lune étoit éclipſée de 1 doit $\frac{1}{2}$ à 7^h 15′ du ſoir le 27 Avril, & que la fin de l'Eclipſe parut à 9^h 40′. Sa quantité dans le temps de ſa plus forte obſcuration étoit

* 24. Novembre 1706.

62
J
être
flec
cle
éga
nat
du
ſes
pu
par
l'e
D
*
l'E
né
l'I
éc
&
tit



c

é
f
c
é
r.
d

f
p
p
l'

s

l

*

l'E
né
l'I

écl
&
tit

étoit de 5 doits $\frac{1}{2}$. L'Obſervateur marque qu'il ne connoiſſoit pas l'heure dans la derniere exactitude.

Cependant cette Obſervation ne laiſſera pas d'être d'une aſſez grande utilité, puiſque nous n'en avons point qui ait été faite dans ces quartiers dont nous en puiſſions conclure la longitude.

Comme le commencement de cette Eclipſe n'a pû être obſervé à *Paris*, nous ne pouvons rien dire de l'Obſervation de 1 doit $\frac{1}{2}$; mais pour la fin nous l'avons très-bien obſervée le 28 Avril au matin à $3^h\ 4'\ 30''$, & au Port de *Pei* on l'a vûe le 27 au ſoir à $9^h\ 40'$: donc la difference de longitude entre l'Obſervatoire Royal & le Port de *Pei* ſera de $5^h\ 24'\ 30''$, ou bien $81°\ 7'\ \frac{1}{2}$, dont ce lieu de l'Iſle de S. *Domingue* eſt plus occidental que *Paris*.

La quantité de cette Eclipſe dans le temps de la plus grande obſcuration a été obſervée ici de 5 doits 40′, & au Port de *Pei* de 5 doits 30′, ce qui n'eſt que fort peu éloigné pour une Obſervation qui n'a pas été faite avec tous les inſtrumens neceſſaires pour une grande juſteſſe, & elle peut nous perſuader de la bonté des précedentes.

Enfin je remarquerai que la plûpart des Cartes que nous eſtimons les plus correctes, poſent ce lieu de S. *Domingue* moins éloigné de *Paris* qu'il ne paroît par cette Obſervation, d'environ 6 degrez.

OBSERVATION

De la conjonction de Jupiter avec le cœur du Lion arrivée au mois d'Octobre 1706.

PAR M. DE LA HIRE.

* JE ne trouve dans les anciens Memoires d'Aſtronomie que nous avons entre les mains, que deux Obſervations de cette conjonction. La premiere fut faite à *Athenes* l'an 508 de Nôtre-Seigneur le 28 Septembre au matin, comme le rapporte M. *Bouillaud* au Liv. 7. Chap. 7. de ſon *Aſtronomie Philolaique*, ce qu'il avoit tiré d'un Manuſcrit de la Bibliotheque du Roi.

Cette Obſervation porte que Jupiter étoit ſeulement éloigné du cœur du Lion vers le Septentrion de 3 doits, & M. *Bouillaud* eſtimant un doit de 2′ 30″, cet éloignement ſera de 7′ 30″. Mais il ajoûte que le cœur du Lion étoit alors à 8° 49′ 54″ ☊, & le Pere *Riccioli* qui rapporte cette même Obſervation, dit que ſuivant ſes propres Obſervations des Etoiles fixes, le cœur du Lion devoit être à 8° 51′ 57″ ☊. La difference qu'il y a entre ces deux poſitions de cette Etoile, eſt ſeulement de 2′ 3″ dont le Pere *Riccioli* la fait plus avancée. M. *Bouillaud* s'étoit ſervi du Catalogue des Etoiles de *Tycho*; mais le Pere *Riccioli* avoit fait beaucoup d'obſervations ſur les Etoiles avec le P. *Grimaldi*.

Mais

* 18. Decembre 1706.

Mais par mes Tables je trouve le lieu du cœur du Lion au temps de l'Obſervation d'*Athenes* à 8° 53′ 54″ ♌, ce qui eſt 4′ plus avancé que M. *Bouillaud*. La longitude de ♃ étoit donc alors la même que celle de l'étoile *Regulus* ou le cœur du Lion à 8° 53′ 54″ ♌.

La latitude de cœur du Lion, comme je l'ai déterminée, eſt de 27′ 6″ *B*; & la poſant invariable, ſi on l'ajoûte aux 7′ 30″ de la diſtance *B* de cette étoile à ♃, on aura ſa latitude de 34′ 36″ *B* dans le temps de l'Obſervation. Mais M. *Bouillaud* trouve à propos d'ajoûter encore un doit à l'Obſervation de la diſtance de ♃ à *Regulus*, & par conſéquent cette latitude ſeroit de 37′ 6″ Bor.

La ſeconde Obſervation d'une ſemblable conjonction que M. *Bouillaud* rapporte auſſi dans le 3. Chap. du Liv. 7. de ſon *Aſtronomie*, eſt de lui-même, en 1623 le 12 Octobre à 17ʰ à *Londun*. Il dit qu'il obſerva que ♃ étoit plus avancé en longitude de 3′ que le cœur du Lion, & qu'il en étoit éloigné de 8′ vers le Septentrion. Il conclud delà la longitude de ♃ au 24° 40′ 6″ ♌ avec ſa latitude Boreale de 35′. Par les Tables des fixes du Pere *Riccioli* la longitude de ♃ ſera au 24° 36′ 35″ du ♌. M. *Bouillaud* qui n'avoit que 19 ans alors ne rapporte point de quelle maniere il fit cette obſervation, ni avec quels inſtrumens, quoique le Pere *Riccioli* lui faſſe dire que c'étoit avec la Lunette.

Par ma poſition de *Regulus* je trouve que ♃ étoit alors au 24° 40′ 1″ ♌ comme fait M. *Bouillaud*. Pour la latitude de ♃ elle auroit été de 35′ 6″ ſuivant ma latitude de *Regulus*, & à très-peu près comme M. *Bouillaud*.

Voici l'obſervation d'une ſemblable conjonc-

tion de cette Planete que j'ai faite le 17 Octobre 1706 à 4^h 12′ 40″ du matin. Je meſurai avec le micrometre la diſtance entre le cœur du Lion & ♃ de 19′ 25″, ♃ étoit vers le Septentrion à l'égard de cette étoile, & de plus il étoit dans la ligne droite qui paſſe par l'étoile marquée *A* dans *Bayer* & par le cœur du Lion; cependant ♃ me ſembloit un peu plus vers l'Occident.

Je trouve par mes Tables que le lieu du cœur du Lion étoit alors au 25° 47′ 15″ ☌. Mais par la poſition que je viens de marquer, ♃ étoit moins avancé que *Regulus* ou le cœur du Lion ſelon l'ordre des Signes de 7′ 35″; donc la longitude de ♃ étoit alors à 25° 39′ 40″ du ☌.

Mais auſſi la diſtance de ♃ à *Regulus* de 19′ 25″ étant oblique à l'Ecliptique, elle ſe réduit à 17′ 55″ par ſa poſition entre les étoiles fixes; & comme la latitude de *Regulus* eſt de 27′ 6″ par mes Tables, on aura la latitude Bor. de ♃ de 45′ 1″.

J'ai calculé par mes Tables le lieu de ♃ tant en longitude qu'en latitude au temps de mon obſervation, & j'ai trouvé la longitude à 25° 40′ 11″ du Lion, & l'obſervation la donnoit à 25° 39′ 40″: donc la difference n'eſt que de 31″ de degré. Pour la latitude tirée du calcul elle eſt de 46′ 21″ Bor. & l'obſervée 45′ 1″ *B*; & par conſéquent la difference ſeroit de 1′ 20″.

Les differences que je viens de trouver entre mon obſervation & mon calcul ne ſont pas conſiderables; mais comme dans la conſtruction de mes Tables Aſtronomiques je me ſuis preſque toûjours ſervi des obſervations des paſſages par le meridien, que j'eſtime bien plus ſû-

ſûres, bien plus juſtes & plus déterminantes que toute autre, ſurtout à cauſe de tous les avantages que nous avons tant de la part des inſtrumens & des horloges, que des connoiſſances neceſſaires pour déterminer leur veritable poſition en longitude & en latitude; j'ai voulu voir ſi ces ſortes d'obſervations que j'avois faites aux environs de cette conjonction répondoient à celles dont je m'étois ſervi, & premierement pour la poſition du nœud de 24 & pour ſon mouvement; car c'eſt dans ce point où je ſuis beaucoup éloigné de M. *Bouillaud*, comme je le dirai dans la ſuite.

Le premier paſſage de 24 par le meridien que j'ai pû obſerver avant qu'il fût arrivé à ſon nœud aſcendant a été en 1705 le 6e Mars au ſoir à $5^h\ 56'\ 51''$, & ſa vraie hauteur meridienne étoit de $63°\ 50'\ 25''$.

Je conclus de cette obſervation que la longitude de 24 étoit alors au $17°\ 25'\ 10''$ de ♊, & ſa latitude auſtrale de $12'\ 55''$. Mais par le calcul de mes Tables je trouve pour ce même temps la longitude au $17°\ 23'\ 45''$ de ♊, & la latitude auſtrale de $12'\ 19''$. La difference de longitude entre le calcul & l'obſervation eſt de $1'\ 25''$, & celle de la latitude de $36'$.

Mais le premier paſſage de 24 par le meridien que je pûs obſerver enſuite après qu'il eût paſſé par ce même nœud, fut en 1705 le 27 Août au matin à $9^h\ 7'\ 3''$: ſa vraie hauteur meridienne étoit de $63°\ 9'\ 48''$. Il faut toûjours entendre dans ces obſervations que c'eſt du centre de cette Planete dont je parle.

Je conclus de cette obſervation que la longitude de 24 étoit alors à $20°\ 44'\ 9''$ du ♋, & que ſa latitude Boreale étoit de $6'\ 3''$. Mais par le cal-

calcul de mes Tables ſa longitude étoit de 20° 41′ 34″, & la latitude 6′ 47″ Bor. La difference de longitude entre le calcul & l'obſervation eſt donc de 2′ 35″, & celle de la latitude de 44″.

Quoique la difference de latitude entre le calcul & ces deux obſervations ne ſoit que d'une demi-minute ou environ, ce qui n'eſt pas conſiderable dans ces ſortes de poſitions, je pourrois pourtant le faire convenir en avançant le nœud un peu plus que je n'ai fait ; mais mes anciennes obſervations ni d'autres plus recentes ne s'y ſeroient pas accordées. Et c'eſt cela principalement qui m'a fait conjecturer qu'il y avoit dans le mouvement du nœud des Planetes une irrégularité à peu près ſemblable à celle que nous connoiſſons dans celui de la Lune, & comme elle m'a paru ſenſiblement dans Saturne, laquelle demanderoit une proſtaphereſe particuliere. Mais comme je n'ai pas trouvé que dans ♄ cette irrégularité fût aſſez ſenſible pour y avoir égard, je me ſuis contenté de prendre une poſition moienne entre toutes celles qui m'étoient marquées par mes obſervations. Cette poſition ou Epoque a été pour l'année 1700 moins avancée que celle de M. *Bouillaud* de plus de 2 degrez. Si j'avois poſé le nœud de ♄ comme M. *Bouillaud* le met, j'aurois trouvé dans les deux obſervations précedentes une difference de pluſieurs minutes entre l'obſervation & le calcul.

Enfin pour revenir à la conjonction de ♄ avec *Regulus*, j'ai crû qu'il ne ſuffiſoit pas d'avoir montré que mes Tables s'accordoient aſſez bien avec mon obſervation dans ce point ; mais qu'il falloit encore en donner des preuves par quel-

quelque paſſage de cette Planete par le meridien, avec ſes vraies hauteurs meridiennes obſervées dans le même temps. Voici donc celles que j'ai faites lorſqu'il m'a été poſſible de l'obſerver; car je ne puis pas voir ♄ au meridien, à moins qu'il ne ſoit éloigné du Soleil d'environ 30 degrez.

Le 20 Septembre de cette année 1706 avant la conjonction de ♄ avec *Regulus*, ſon centre paſſa au meridien à 9^h 45′ 25″ du matin, & ſa vraie hauteur meridienne étoit de 56° 23′ 31″. Je tire de cette obſervation la longitude de ♄ au 20° 49′ 47″ du ☊, & ſa latitude Boreale de 40′ 51″. Le calcul de mes Tables me donne pour ce même temps la longitude de cette Planete au 20° 52′ 0″, & la latitude Bor. de 41′ 58″. La difference de longitude entre l'obſervée & le calcul eſt de 2′ 13″, & celle de la latitude eſt de 1′ 7″.

Le 14 Octobre ſuivant, & trois jours avant la conjonction de ♄ à *Regulus*, j'obſervai le paſſage du centre de ♄ par le meridien à 8^h 35′ 16″ du matin, & ſa vraie hauteur meridienne étoit de 55° 1′ 8″. Je conclus de cette obſervation que la longitude de ♄ étoit alors au 25° 13′ 26″ du ☊, & que ſa latitude étoit Boreale de 45′ 33″. Le calcul de mes Tables donne ſa longitude pour ce temps-là au 25° 12′ 11″ du ☊, & ſa latitude Boreale de 45′ 51″: donc la difference de longitude entre l'obſervée & le calcul eſt de 1′ 15″, & celle de latitude de 18″.

Le 18 du même mois & le jour ſuivant la conjonction de ♄ à *Regulus*, j'obſervai le paſſage du centre de ♄ par le meridien à 8^h 22′ 51″ du matin, & ſa vraie hauteur meridienne de

54° 48′ 22″, d'où je tire par les regles ordinaires le vrai lieu de ♃ au 25° 51′ 9″ du ☊ avec une latitude Boreale de 45′ 47″. Mais par le calcul de mes Tables je trouve pour ce même temps le vrai lieu de ♃ au 25° 51′ 12″ du ☊ avec une latitude Boreale de 45′ 35″: donc la difference de longitude entre l'obſervation & les Tables 3″, & celle de la latitude de 12″.

Enfin le 27 ſuivant j'obſervai encore le paſſage du centre de ♃ par le meridien à 7ʰ 53′ 57″ du matin, & ſa vraie hauteur meridienne de 54° 23′ 7″. Je conclus de cette obſervation que ♃ étoit alors au 27° 12′ 21″ du ☊, & que ſa latitude étoit Boreale de 48′ 13″, & le calcul par mes Tables donne la longitude pour ce même temps de 27° 11′ 34″ du ☊, & la latitude Boreale de 48′ 22″. La difference de longitude entre l'obſervation & le calcul ſera donc de 47″, & celle de latitude de 9″.

Les obſervations que je viens de rapporter en dernier lieu, leſquelles ſont comparées avec le calcul, font voir la juſteſſe de mes Tables, & l'on ne doit pas s'étonner ſi dans celles qui ſont proches les unes des autres on y trouve des differences qui paſſent une minute de degré tantôt excedente & tantôt défaillante, ce qu'on doit plûtôt attribuer à quelque cauſe particuliere de l'obſervation ou des inſtrumens qu'aux Tables, ſurtout pour les Planetes ſuperieures qui vont lentement; car il s'y doit trouver une eſpece de progreſſion aſſez uniforme pour un peu de temps, & à peu près telle que la donne le calcul.

Je pourrois rapporter ici pluſieurs cauſes qui empêchent que les obſervations ne répondent à l'exactitude & aux ſoins qu'on y apporte; mais il

il me ſuffira de dire à preſent que pour remedier à cet inconvenient, on doit faire un grand nombre de ſemblables obſervations entre leſquelles on prend un milieu.

Dans ce que j'ai dit ci devant je n'ai point comparé mon calcul avec l'obſervation de 508, ni avec celle de 1623, ſur leſquelles M. *Bouillaud* fonde une partie de ſon ſyſtême de Jupiter; car il m'a ſemblé qu'elles ne ſauroient s'accorder exactement entr'elles, ni avec celles que nous faiſons preſentement. Ces ſortes d'obſervations ſont ſujettes à des erreurs très-conſiderables, n'étant faites pour la plûpart qu'à la vûe ſimple & ſans aucune détermination poſitive. On ne laiſſe pas pourtant de s'en ſervir autant qu'on le peut, quand elles ſont fort éloignées de ces temps-ci, parcequ'elles ſont utiles pour déterminer à peu près les mouvemens des corps celeſtes; mais on ne doit pas s'y aſſujettir par trop, quand elles repugnent aux dernieres qu'on connoît pour très-exactes.

Par exemple, mes Tables me donnent dans le temps de l'obſervation d'*Athenes* le lieu de 2ℵ plus avancé que l'obſervation ne demanderoit de près de 8′, & la latitude ſeulement plus petite de trois quarts de minute. Mais pour celles de M. *Bouillaud* de 1623, elles me donnent la longitude un peu plus de 10′ plus avancée que l'obſervation, & la latitude plus grande de plus de 10′, & dans tous ces temps-ci elles s'accordent avec le Ciel.

C'eſt cette latitude plus grande de 10′ qui me rend ſuſpecte l'obſervation de M. *Bouillaud*; car mes Tables donnent la latitude dans la même minute que l'obſervée en 508, & depuis ce temps-là juſqu'à l'obſervation de M. *Bouillaud*

en 1623 il y a plus de 1100 ans, pendant lesquels le nœud de ♃ n'a fait que 2 ou 3 degrez, & en 508 au temps de l'obſervation l'argument de latitude n'étoit que de 27° environ; donc en 1623 l'orbite de ♃ n'avoit pas changé conſiderablement de ſa premiere place, & dans le temps de cette obſervation ♃ & la terre ſe trouvoient encore à peu près dans le même aſpect : mais comme le cœur du ☊ s'eſt avancé en 1100 ans de plus de 15 degrez, il faut neceſſairement que l'argument de latitude ſoit augmenté de plus de 13 degrez, ce qui doit donner en 1623 une inclinaiſon à ♃ beaucoup plus grande qu'elle n'étoit en 508; & par conſéquent la latitude de ♃ devoit être beaucoup plus grande en 1623 qu'en 508; cependant l'obſervation de 508 donne la latitude de ♃ de 34′ 36″ ou 37′ 6″ comme veut M. *Bouillaud*, & ſon obſervation de 1623 ne la montre que de 35′ 6″, ce qui ne peut pas être; auſſi je l'ai trouvée par mes Tables de 10′ plus grande que celle qu'on tire de cette obſervation.

Enfin M. *Bouillaud* finit ſon ſeptiéme Livre où il traite des mouvemens de ♃ par une eſpece d'inſulte qu'il fait à *Kepler*, en donnant le calcul de ♃ pour le temps de l'obſervation de l'an 508 par les Tables *Rudolphines* pour faire voir que ces Tables ſont fort défectueuſes pour cette Planete; car il dit qu'elles marquent la diſtance de ♃ à Regulus de plus d'un degré à cauſe de la latitude, & la longitude par ce même calcul étoit plus grande que l'obſervée de près de 48′. Mais je remarque que le peu de difference de latitude entre Regulus & ♃, n'a pas pû augmenter la diſtance de 48′ à plus d'un degré. Il conclud enfin que *Kepler* n'a pas pû mieux faire

re aiant été privé de ce ſecours, c'eſt à dire des deux obſervations dont il parle.

Cependant comme je ſuis perſuadé de l'exactitude de *Kepler*, & que s'il n'a pas eu les deux obſervations de M. *Bouillaud*, il en a eu d'autres & plus anciennes & dans le même temps à peu près que celle de 1623, j'entens celles de *Tycho* que j'eſtime des plus juſtes, & dont M. *Bouillaud* a eu auſſi quelque connoiſſance; & quoique je ſûſſe bien que mes Tables étoient aſſez éloignées des *Rudolphines* en quelques endroits, j'ai voulu verifier le calcul que M. *Bouillaud* rapporte tout au long, de la poſition de ♃ dans le temps de l'obſervation de 508 ſuivant les *Rudolphines*.

J'ai trouvé tout d'abord que le calcul de M. *Bouillaud* eſt faux, car il trouve le Soleil moins avancé d'un degré qu'il ne devroit être par ces Tables, ce qui eſt une erreur aſſez conſiderable, & ce qui vient aſſurément de ce que M. *Bouillaud* en calculant n'a pas fait attention que l'année 508 étoit Biſſextile, & il l'a calculée comme une année commune, car il lui manque le mouvement du Soleil pour un jour. Il a fait auſſi la même faute pour le calcul de ♃ qu'il rapporte enſuite. Ces deux fautes enſemble lui auroient encore avancé le lieu de ♃ de 3′ environ. Pour la latitude elle eſt très-peu éloignée de celle qu'on tire de l'obſervation.

Pour ce qui eſt de l'obſervation de M *Bouillaud* de 1623, les Tables *Rudolphines* s'y accordent aſſez bien en ce qui regarde la longitude, mais pour la latitude elles s'en écartent à peu près autant que je l'ai trouvé par les miennes; d'où je conclus enfin que M. *Bouillaud* n'avoit pas bien eſtimé ou meſuré la diſtance entre Regu-

lus & 24, & que la grande lumiere de 24 lui faiſoit paroître cette diſtance beaucoup plus petite qu'elle n'étoit en effet; & c'eſt une raiſon qu'il rapporte lui-même dans l'examen qu'il fait de quelques obſervations.

DIFFÉRENTES MANIÉRES INFINIMENT GÉNÉRALES

De trouver les Rayons oſculateurs de toutes ſortes de Courbes, ſoit qu'on regarde ces Courbes ſous la forme de Polygones, ou non.

PAR M. VARIGNON.

* LA maniére dont j'ai cherché le raport des Forces centrales aux Peſanteurs des corps dans le Mémoire que je donnai ſur cela à l'Academie le 24. Avril dernier †, m'aiant engagé (excepté dans la troiſiéme Solution du Problême par où ce Mémoire commence) à conſidérer les Courbes, non à l'ordinaire ſous la forme de Polygones infiniti-lateres rectilignes, mais comme faites d'élémens veritablement courbes eux-mêmes; je fus obligé d'en chercher les rayons oſculateurs dans cette hypothêſe, dans laquelle je ne ſais perſonne qui l'ait encore fait. C'eſt ce qui m'a fait penſer à les y rechercher en général; & cette conſidération des Courbes comme faites d'élémens véritablement

* 18. Decembre. 1706.

† *Voyez ci-deſſus la page* 222.

ment courbes eux-mêmes, m'a donné des expreſſions de ces rayons oſculateurs, leſquelles ſe ſont trouvées préciſément les mêmes que celles que la conſidération de ces mêmes Courbes ſous la forme de Polygones infiniti-lateres rectilignes m'avoit déja données dans les Mémoires de 1701. pag. 29. &c.

Voici comment ces expreſſions me ſont venues dans la premiére de ces conſidérations ou hypothéſes ; & puis nous verrons encore quelques autres maniéres de les trouver dans la ſeconde par des voies toutes differentes de celle que j'ai ſuivie dans ces Mémoires de 1701.

PROBLÉME I.

Une Courbe quelconque, dont les ordonnées concourent en quelque point que ce ſoit, étant donnée ; trouver une expreſſion générale de ſes rayons oſculateurs ſans y rien ſuppoſer de conſtant, & en regardant cette Courbe, non à l'ordinaire ſous la forme de Polygone infinitilatere rectiligne, mais comme faite d'élemens courbes eux-mêmes.

SOLUTION.

I. Soit * *DBY* la Courbe quelconque donnée, dont les ordonnées *BE*, *CE*, &c. concourent en *E* ; & dont *AB*, *BC*, ſoient deux élémens, c'eſt à dire, deux arcs infiniment petits du premier genre, leſquels ne différent entr'eux que d'une grandeur infiniment petite du ſecond genre, & par conſéquent nulle par raport à eux. Soient auſſi *AB*, *BC*, les cordes

* FIG. I.

de ces deux petits arcs, dont la premiére prolongée vers R, rencontre en S l'ordonnée EC prolongée de ce côté-là. Soient de plus l'angle $SBP = SEB$; l'arc CI décrit du centre B par C, & qui rencontre la droite BP en I; la droite CM perpendiculaire en N ſur BP, laquelle BP ſoit auſſi rencontrée en L par KL parallele à ES. Soient enſuite BV, CV, deux rayons oſculateurs de la Courbe en queſtion, laquelle Courbe $DB\Upsilon$ ſoit touchée au point B par la droite ZQ éxactement perpendiculaire au premier BV de ces rayons, & qui rencontre le ſecond VC prolongé en F, l'ordonnée EC prolongée en Q, & la droite CM en X. Enfin après avoir fait la droite CO perpendiculaire en O ſur la tangente ZQ, ſoient auſſi les droites AG, BH, CT, perpendiculaires en G, H, T, ſur BE, CE, LK, laquelle LK rencontre en K la ſeconde BH de ces perpendiculaires.

Cela fait, ſoit y le nom des ordonnées BE, CE; dx, celui de leurs perpendiculaires AG, BH; ds, celui des arcs élémentaires AB, BC; & r, celui des rayons oſculateurs BV, CV.

II. Tout cela ſuppoſé, les angles rectilignes ABE, BPE, étant externes par raport aux triangles EBS, BPS, l'on aura l'angle rectiligne $ABE = BES + BSE$ (*art.* 1.) $= PBS + BSE = BPE$. Donc les angles en G & en H, étant (*art.* 1.) droits, les triangles rectilignes ABG & BPH ſeront ſemblables entr'eux; & par conſéquent (*art.* 1.) les triangles rectilignes ABG, BLK, le ſeront auſſi: De ſorte que ſi l'on ſuppoſe de plus $BK = AG$, ces deux derniers triangles ſeront non-ſeulement ſemblables, mais auſſi égaux

égaux en tout. Donc la corde AB ou son arc infiniment petit $AB\ (ds) = BL = BI\ (ds) + IL$; & par conséquent $IL = -dds$ négative, les ds (AB) allant ici en diminuant pendant que les dx (AG) vont en augmentant : Ce qui donnera au contraire $HK = ddx$ positive. D'où l'on aura aussi $BH\ (dx)$. $BP\ (ds) :: HK\ (ddx)$ $LP = \frac{dsddx}{dx}$. Donc $IP\ (IL + LP) = -dds + \frac{dsddx}{dx}$ ou $NP = \frac{dsddx - dxdds}{dx}$.

Mais la ressemblance (*art.* 1.) des triangles rectilignes PNC, PHB, donne PH ou $CH\ (dy)$. $BH\ (dx) :: NP\ \left(\frac{dsddx - dxdds}{dx}\right)$ $NC = \frac{dsddx - dxdds}{dy}$. De même la ressemblance (*art.* 1.) des triangles rectilignes BEH, MBN, donne aussi $BE\ (y)$. $BH\ (dx) :: BM\ (ds)$. $MN = \frac{dxds}{y}$. Donc la droite $MC\ (MN + NC) = \frac{dxds}{y} + \frac{dsddx - dxdds}{dy} = \frac{dydxds + ydsddx - ydxdds}{ydy}$.

III. Concevons présentement que l'*osculum* ou l'attouchement de la Courbe proposée DBY avec son cercle osculateur décrit du centre V par B, se fasse (en tout ou en partie) sur l'arc infiniment petit ABC. En ce cas cet arc ABC de la Courbe proposée DBY, sera aussi un arc de cercle décrit du centre V & du rayon VB ou VC. Donc suivant la doctrine d'*Euclide*

Prop.

Prop. 32. du Liv. 3. & Prop. 33. du Liv. 6. les angles rectilignes ABZ, CBQ, compris entre ſa touchante ZQ, & les cordes des arcs partiaux AB, BC, ſeront entr'eux comme ces arcs. Par conſéquent ces arcs, qui (*art.* 1.) ne différent entr'eux que d'une différence infiniment petite par raport à eux, devant paſſer pour égaux, les angles rectilignes ABZ, CBQ, doivent paſſer de même pour égaux entr'eux. Mais l'angle rectiligne ABZ eſt auſſi égal à l'angle SBQ qui lui eſt oppoſé au ſommet B. Donc les deux angles rectilignes CBQ, SBQ, ſont pareillement égaux entr'eux. Par conſéquent encore ſuivant la doctrine d'*Euclide* Prop. 3. du Liv. 6. BQ doit diviſer la droite CM en X de maniére qu'elle donne $CX. XM :: BC. BM.$ en prenant ici BC pour la corde de l'arc BC. Mais l'angle indéfiniment petit CBM, compris entre cette corde & l'autre AB prolongée vers R, rend cette premiére corde BC égale à BM. Donc auſſi $CX = XM$, ou $CX = \frac{1}{2}CM$. Mais on vient de trouver (*art.* 2.) $CM = \frac{dxdyds + \bar{y}dsddx - ydxdds}{ydy}$. Donc on aura pareillement $CX = \frac{dxdyds + ydsddx - ydxdds}{2ydy}$.

Or ſi l'on conſidére que les angles (*art.* 1.) droits BNC, BOC, QBV, rendant les triangles BNX, COX, & FOC, FBV, ſemblables entr'eux deux à deux, il en doit réſulter $CX. CO :: BX. BN.$ Et $CO. CF :: VB. VF.$ On verra que les angles (*art.* 1.) infiniment petits NBX, & BVF, rendant auſſi $BX = BN$, & $VB = VF$, il en doit réſulter $CX = CO = CF$. Donc $CF = \frac{dxdyds + ydsddx - ydxdds}{2ydy}$.

Mais

Mais en considérant, ainsi que l'on fait ici, l'arc (d'*osculum*) BC comme un véritable arc de cercle dont V est le centre, & BF la tangente en B, perpendiculaire au rayon BV; la doctrine d'*Euclide* (*Prop.* 36. *Liv.* 3.) donne $\overline{BF}^2 = CF \times \overline{FV + CV}$: De sorte que la supposition de l'angle BVF (*art.* 1.) infiniment petit, donnant aussi $FV = CV = BV$, & l'arc $BC = BF$, ce cas doit donner de même $\overline{BC}^2 = \overline{BF}^2 = CF \times \overline{FV + CV} = CF \times 2CV = 2CF \times BV$, & conséquemment aussi $BV = \frac{BC \times BC}{2CF}$.

Donc en substituant ici la valeur précédente de CF, avec les noms de ds & de r, donnez à l'arc BC & au rayon BV dans l'art. 1. Cette considération des élémens AB, BC, de la Courbe proposée DBY, comme de véritables arcs de son cercle osculateur ABC, donne enfin $r = \frac{ydyds^2}{dxdyds + ydsddx - ydxdds}$ pour l'expression générale du rayon de ce cercle, ou de la Dévelopée de cette Courbe, sans y rien supposer de constant: & cette expression est précisément la même que la premiére des infiniment générales que j'ai tirée dans les Mémoires de 1701. pag. 33. de la considération de cette même Courbe DBY sous la forme de Polygone infiniti-latere, dont les côtez infiniment petits AB, BC, étoient regardez comme de petites lignes droites. *Ce qu'il falloit trouver.*

AUTRE SOLUTION.

* IV. Au lieu de BP, LK, CM, CI, CO, CT, ſoient ET, Et, perpendiculaires ſur EB, EC, & qui rencontrent en T, O, t, les cordes BA, CB, prolongées de ce côté-là. Du point O ſoit OM perpendiculaire en M ſur Bt. Soit de plus du centre E par T l'arc TK qui rencontre en K la ſoûſecante Et, ſur laquelle tombe auſſi TL perpendiculaire en L.

V. Tout le reſte demeurant le même que dans l'art. 1. la conſtruction qui rend (*art.* 4.) les triangles rectilignes rectangles BGA, BET, & BHE, TLE, ſemblables entr'eux, donnera BG (dy). AG (dx)::BE (y). $TE = \frac{ydx}{dy}$:: BH (dx). $TL = \frac{dx^2}{dy}$. La même conſtruction rendant auſſi (*art.* 4.) les triangles rectilignes rectangles SEO, TLO, ſemblables entr'eux, donnera pareillement SE ou CE (y). EO ou $ET\left(\frac{ydx}{dy}\right)$:: $TL\left(\frac{dx^2}{dy}\right)$. LO ou $KO = \frac{dx^3}{dy^2}$. Or ſi l'on prend la différence de la ſoûſecante $ET\left(\frac{ydx}{dy}\right)$ ſans y rien ſuppoſer de conſtant, il vient $Et - ET$ ou $Kt = \frac{dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}$. Donc $Ot = \frac{dx^3 + dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}$ (à cauſe de $dx^2 + dy^2 = ds^2$) $= \frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}$.

De

* FIG. II.

De ſorte que la conſtruction rendant (*art.* 4.) les triangles rectilignes rectangles *CHB*, *CEt*, *OMt*, ſemblables entr'eux, l'on aura auſſi *CB* (*ds*). *CH* (*dy*) :: *Ot* $\left(\frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}\right)$. *OM* $= \frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{dyds}$. Ajoûtez à cela que les triangles rectilignes ſemblables *BGA*, *BET*, donnent pareillement *BG* (*dy*). *BA* (*ds*) :: *BE* (*y*). *BT* ou *BO* $= \frac{yds}{dy}$. Donc l'angle *OBM* étant égal à la moitié de l'arc (d'*oſculum*) *ABC*, ou (*art.* 1.) à l'arc entier *BC*, lequel eſt auſſi égal à l'angle *BVC*; les triangles rectilignes *OMB*, *FBV*, (*hyp.*) rectangles en *M*, *B*, donneront enfin *OM* $\left(\frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{dyds}\right)$. *MB* ou *BO* $\left(\frac{yds}{dy}\right)$ :: *BF* ou *BC* (*ds*). *BV* (*r*) $= \frac{yds^3}{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}$. Et cette expreſſion des rayons oſculateurs, reſultante de la conſidération de la courbure des élémens de la Courbe propoſée ſans y rien ſuppoſer de conſtant, eſt encore la même que la troiſiéme des infiniment générales des Mémoires de 1701. pag. 34. tirées de la conſidération de ces mêmes élémens regardez comme autant de petites lignes droites ou de côtez infiniment petits du Polygone infiniti-latere rectiligne ſous la forme duquel cette Courbe étoit regardée. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

TROI-

TROISIÉME SOLUTION.

* VI. Soit encore DBY une Courbe quelconque dont les ordonnées BE, CE, &c. concourent en E; & dont les arcs AB, BC, ſoient encore deux élémens ou infiniment petits du premier genre. Soient de plus BT, Ct, deux tangentes de ces arcs en leurs extrémitez B, C, dont la premiere prolongée rencontre l'autre en N, & l'ordonnée EC prolongée en S. Après avoir fait les droites ET, Et, perpendiculaires aux ordonnées BE, CE, & qui rencontrent les tangentes BT, Ct, en T, O, t; ſoient les droites TL, OM, perpendiculaires en L, M, à Et, Ct; ſoient auſſi des centres E, N, les arcs circulaires TK, OP. Soient enfin les droites AG, BH, perpendiculaires ſur BE, CE, & qui prolongées rencontrent en F, Q, les tangentes BT, Ct.

Cela fait, ſoit encore y le nom des ordonnées BE, CE; dx, celui de leurs perpendiculaires AG, BH; ds, celui des arcs élémentaires AB, BC; & r, celui des rayons oſculateurs BV, CV.

VII. Tout cela ſuppoſé, & procédant à peu près comme dans la Solution 2. les triangles rectilignes (*conſtr.*) ſemblables BGF, BET, & BHE, TLE, donneront $BG\ (dy).\ FG$ ou $AG\ (dx) :: BE\ (y).\ TE = \frac{ydx}{dy} :: BH\ (dx).\ TL = \frac{dx^2}{dy}$. Pareillement les triangles rectilignes (*conſtr.*) ſemblables SEO, TLO, donneront auſſi SE ou $CE\ (y).\ EO$ ou $ET\ (ydx)$

* FIG. III.

$\left(\frac{ydx}{dy}\right) :: TL\left(\frac{dx^2}{dy}\right) . LO$ ou $KO = \frac{dx^3}{dy^2}$.

Or en prenant la difference de la ſoûtrangente $ET\left(\frac{ydx}{dy}\right)$ ſans y rien ſuppoſer de conſtant, on la trouve être $Et - ET$ ou $Kt = \frac{dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}$. Donc $Ot = \frac{dx^3 + dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}$ (à cauſe de $dx^2 + dy^2 = ds^2$) $= \frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}$.

Donc auſſi les triangles rectilignes (*conſtr.*) ſemblables CHQ, OMt, donneront CQ ou CB (ds). $CH\,(dy) :: Ot\left(\frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}\right)$. OM ou $OP = \frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{dyds}$. De plus les triangles rectilignes (*conſtr.*) ſemblables BGF, BET, donnent pareillement BG (dy). BF ou BA $(ds) :: BE\,(y)$. BT ou $NO = \frac{yds}{dy}$. De plus encore le quadrilatere rectiligne $VBNC$ aiant les angles droits en B, C, l'angle BNC avec l'angle V en doit valoir deux droits de même qu'avec l'angle ONP : Ainſi ce dernier angle ONP doit être égal à l'angle V, & le ſecteur NOP être ſemblable au ſecteur VBC. Donc enfin $OP\left(\frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{dyds}\right)$. $ON\left(\frac{yds}{dy}\right) :: BC(ds).BV(r) = \frac{yds^3}{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}$.

Ce qui eſt la même expreſſion des rayons oſculateurs que celle qui vient d'être trouvée dans la précédente Solution 2.

Voi-

*Voilà de quelle maniére ces expreſſions infiniment générales ſe peuvent trouver, ſans conſidérer les Courbes ſous aucune forme de Polygones rectilignes. Voici préſentement pluſieurs autres maniéres de les trouver encore en conſidérant les Courbes ſous cette forme de Polygones infiniti-lateres rectilignes, dont quelques-unes m'ont été inſpirées par l'*Analyſe des Infiniment petits.

PROBLÊME II.

Une Courbe quelconque, dont les ordonnées concourent en quelque point que ce ſoit, étant encore donnée, trouver encore une expreſſion générale de ſes rayons oſculateurs ſans y rien ſuppoſer de conſtant; mais en regardant préſentement cette Courbe comme un Polygone infiniti-latere rectiligne.

PREMIÉRE SOLUTION.

VIII. * Soit DBT la Courbe propoſée, dont les ordonnées BE, CE, &c. concourent toutes au point E. Soient de plus BV, CV, deux de ſes rayons oſculateurs infiniment proches l'un de l'autre, leſquels ſe rencontrent en V; ſoient auſſi par leurs extrémitez B, C, les tangentes BT, Ct, faites des petits côtez prolongez BA, CB, de la Courbe conſidérée comme polygone rectiligne infiniti-latere, leſquels ſe joignent en B. Soient ET, Et, perpendiculaires en E aux ordonnées BE, CE, de cette Courbe, & qui rencontrent en T, t, les tangentes BT, Ct, qui leur répondent, & dont CE rencontre encore TB prolongée en S.

Du

* FIG. IV.

Du centre E par les points A, B, T, ſoient les petits arcs des cercles AG, BH, TK, qui rencontrent BE, CE, Et, en G, H, K. Enfin du centre B par le point O, ou BT rencontre Et, ſoit l'arc QP qui rencontre Ct en P.

IX. Cela fait, les angles droits VCB, ou VCt, & VBT, rendant les angles en B, V, des triangles iſoſceles OBP, BVC, égaux entr'eux, ces triangles ſeront ſemblables, de même que le ſont les triangles SEO, TKO; BGA, BET; & les petits ſecteurs EBH, ETK. Donc OP. BO ou Ct :: BC. $BV = \frac{BC \times Ct}{OP}$. Et en appellant les ordonnées BE ou CE, y; BG ou CH, dy; AG ou BH, dx; & AB ou BC, ds; l'on aura pareillement BG (dy). AG (dx) :: BE (y). $ET = \frac{ydx}{dy}$ :: BH (dx). $TK = \frac{dx^2}{dy}$. Et SE ou CE (y). EO ou $ET\left(\frac{ydx}{dy}\right)$ :: $TK\left(\frac{dx^2}{dy}\right)$. $KO = \frac{dx^3}{dy^2}$. Or ſi l'on prend la difference de $ET\left(\frac{ydx}{dy}\right)$ ſans y rien ſuppoſer de conſtant, il vient $Et - ET$ ou $Kt = \frac{dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}$; & partant $OK + Kt$ ou $Ot = \frac{dx^3 + dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}$ (à cauſe de $dx^2 + dy^2 = ds^2$) $= \frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}$.

X. De plus les triangles ſemblables CHB, CEt, OPt, donnent BC (ds). CH (dy) :: Ct. CE

$CE\ (y) :: Ot \left(\frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2} \right)$.

$OP = \frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{dyds}$. D'où réſulte auſſi $Ct = \frac{yds}{dy}$. Donc en ſubſtituant ces valeurs de OP, Ct, avec celle de BC (ds), dans la formule $BV = \frac{BC \times Ct}{OP}$ trouvée ci-deſſus art. 9. l'on aura auſſi $BV = \frac{yds^3}{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}$ pour l'expreſſion générale cherchée des rayons oſculateurs de toutes ſortes de Courbe, laquelle eſt la même que celle des art. 5. 7. & dans laquelle il n'y a encore rien de conſtant. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

SECONDE SOLUTION.

XI. Au lieu des tangentes BT, Ct, de leurs ſoûtangentes ET, Et, & des petits arcs TK, OP, ſoient du point V les perpendiculaires VM, Vm, ſur les ordonnées BE, CE, dont celle-ci CE ſoit rencontrée en N par VM perpendiculaire ſur l'autre BE, de qui la partie MB ſoit appellée v.

Tout le reſte demeurant le même que ci-deſſus art. 8. & 9. les triangles ſemblables BHC, BMV, donneront $BH(dx).\ BC\ (ds) :: MB\ (v).\ BV = \frac{vds}{dx}$. Donc BV étant conſtante, ſa différence $\frac{dvdxds + vdxddx - vdsddx}{dx^2}$ doit être $= 0$. Donc $v = \frac{dvdxds}{dsddx - dxdds}$. Mais les mêmes triangles

gles ſemblables BHC, BMV, donnent auſſi $BH\,(dx).\ CH\,(dy)::MB\,(v).\ MV$ ou $mV=\frac{vdy}{dx}$. Et à cauſe des triangles ſemblables BEH, NVm, l'on aura de même $BE\,(y).\ mV\left(\frac{vdy}{dx}\right)::BH\,(dx).\ Nm=\frac{vdy}{y}$. Donc $dy-\frac{vdy}{y}=CH-Nm=dv$, à cauſe que (*hyp.*) $v=MB=EB-EM$, c'eſt à dire, $dv=\frac{ydy-vdy}{y}$. Donc auſſi en ſubſtituant cette valeur de dv dans la précédente équation $v=\frac{dvdxds}{dsddx-dxdds}$, l'on aura $yvdsddx-yvdxdds=ydydxds-vdydxds$; ce qui donne $v\,(MB)=\frac{ydxdyds}{ydsddx-ydxdds+dxdyds}$. Mais les triangles ſemblables BHC, BMV, donnent encore $BH\,(dx).\ BC\,(ds)::MB\left(\frac{ydxdyds}{ydsddx-ydxdds+dxdyds}\right).\ BV=\frac{vdyds^2}{ydsddx-ydxdds+dxdyds}$. Ce qui eſt encore une autre expreſſion générale des rayons des Développées de toutes ſortes de Courbes, dans laquelle il n'y a encore rien de conſtant, & qui eſt auſſi la même que celle de l'art. 3. ci-deſſus. Ce qu'il falloit encore trouver; & ce que l'équation $BV=\frac{vds}{dx}$ trouvée ci-deſſus, auroit auſſi donné en y ſubſtituant la derniére valeur de v.

TROISIÉME SOLUTION.

XII. Toutes demeurant les mêmes que dans l'art. 11. excepté qu'au lieu de $BM=v$, on ſuppoſe ici le rayon oſculateur $BV=r$ conſtant. Les triangles ſemblables BHC, BMV, donneront $BC\ (ds).\ BH\ (dx)::\ BV\ (r).\ BM=\frac{r\,dx}{ds}$. Et $BC\ (ds).\ CH\ (dy)::\ BV\ (r).\ MV=\frac{r\,dy}{ds}$. De qui la différence eſt $MN=\frac{-rdsddy+rdyd^2s}{ds^2}$ négative à cauſe que $BE\ (y)$ & $MV\left(\frac{r\,dy}{ds}\right)$ croiſſent alternativement, & qu'on fait ici dy poſitif. Donc $BH-MN\ \left(dx-\frac{rdydds+rdsddy}{ds^2}\right).\ BH\ (dx)::\ BM\left(\frac{r\,dx}{ds}\right).\ BE\ (y)$. Ce qui donne $ydxds^2-rydydds+rydsddy=rdsdx^2$; & par conſéquent $r\ (BV)=\frac{ydxds^2}{dsdx^2+ydydds-ydsddy}$. Ce qui eſt encore une expreſſion générale du rayon oſculateur telle qu'on la demande.

QUATRIÉME SOLUTION.

XIII. Au lieu des droites VM, Vm, ſoient du point E les perpendiculaires EF, Ef, ſur les rayons oſculateurs BV, CV, dont le premier BV ſoit rencontré en L par Ef perpendiculaire ſur le ſecond CV.

Tout le reſte demeurant le même que dans l'art. 11. les triangles ſemblables BHC, BFE, don-

donneront $BC\ (ds).\ BH\ (dx) :: BE\ (y).\ BF$ ou $BL = \frac{ydx}{ds}$. Et $BC\ (ds).\ CH\ (dy) :: BE\ (y).\ EL = \frac{ydy}{ds}$. De qui la différence eſt $Lf = \frac{dsdy^2 + ydsddy - ydyddx}{ds^2}$. Donc à cauſe des triangles ſemblables BVC, LVf, l'on aura auſſi $BC - Lf \left(\frac{ds^3 - dsdy^2 - ydsddy + ydyddx}{ds^2}\right).\ BC\ (ds) ::$ $BL\ \left(\frac{ydx}{ds}\right).\ BV\ (r) = \frac{ydxds^2}{ds^3 - dsdy^2 - ydsddy + ydyddx}$ (à cauſe de $dx^2 = ds^2 - dy^2$) $= \frac{ydxds^2}{dsdx^2 - ydsddy + ydyddx}$. Ce qui eſt la même expreſſion générale cherchée que celle de l'art. 12.

CINQUIÉME SOLUTION.

* XIV. Soit encore une Courbe quelconque $DB\Upsilon$, dont AB, BC, ſoient deux des côtez infiniment petits en la conſidérant encore comme polygone infiniti-latere rectiligne, & dont les ordonnées BE, CE, &c. concourent toutes au point E. De ce centre E par les points A, B, L, ſoient les arcs AG, BH, LO, en prenant auſſi BL pour infiniment petite du premier genre. Enſuite après avoir décrit du centre B l'arc AM qui rencontre LO en R, & le petit côté CB prolongé ou la tangente BK en M; ſoit l'angle KBO égal à l'angle CEB, & dont le côté BO, rencontre cet arc AM en N, & LO en O. Soit de plus AP parallele à BE, & qui rencontre auſſi LO en P.

* FIG. V.

Soient enfin appellées AG ou BH, dx; AB ou BC, ds; & BE ou CE, y; ce qui donnera auſſi BG ou $CH = dy$ poſitive en prenant l'origine de tout cela du côté de D.

Cela poſé, les triangles (*conſtr.*) ſemblables HEB & MBN donneront EB (y). BH (dx) :: BM ou BA (ds). $MN = \frac{dx\,ds}{y}$. Pareillement les triangles (*conſtr.*) ſemblables OLB, ONR, & APR, donneront auſſi OL ou AG (dx). BL ou BG (dy) :: ON. $NR = \frac{ON \times dy}{dx}$. Et OL ou AG (dx). BO ou BA (ds) :: AP. $AR = \frac{AP \times ds}{dx}$. Donc AM ($MN + NR + RA$) $= \frac{dx\,ds}{y} + \frac{ON \times dy}{dx} + \frac{AP \times ds}{dx} = \frac{ds\,dx^2 + ON \times y\,dy + AP \times y\,ds}{y\,dx}$.

Or ſi l'on imagine que AV, BV, ſoient deux rayons de la Dévelopée de la Courbe DBY, la reſſemblance des triangles BVA, MBA, donnera de plus $AM \left(\frac{ds\,dx^2 + ON \times y\,dy + AP \times y\,ds}{y\,dx} \right)$. AB (ds) :: AB (ds). $BV = \frac{y\,dx\,ds^2}{ds\,dx^2 + y\,dy \times ON + y\,ds \times AP}$.

XV. Quant aux valeurs de ON & de AP, elles ſe détermineront en ſuppoſant $BL = CH$; car alors (les triangles HCB & LBO ſe trouvant non-ſeulement ſemblables, à cauſe que leurs angles en H & en L ſont ſuppoſez droits, & que ceux-ci $EBO + OBK = EBK = ECB + CEB$ (*hyp.*) $= ECB + OBK$, donnent $EBO = ECB$; mais encore égaux en tout à cauſe qu'on ſuppoſe auſſi $BL = CH$) l'on aura $ON = BO - BA = CB - BA = dds$, & $AP = BG - BL = BG - CH = -ddy$ négative, à cauſe

cauſe que dy diminue pendant que tout le reſte augmente. Donc en ſubſtituant ces valeurs de ON & de AP dans la précédente (*art.* 14.) de BV, l'on aura $BV = \frac{y\,dx\,ds^2}{ds\,dx^2 + y\,dy\,dds - y\,ds\,ddy}$. Ce qui eſt encore une expreſſion générale des rayons oſculateurs, dans laquelle il n'y a encore rien de conſtant, & la même encore que celle des deux Solutions précédentes art. 12. & 13.

REMARQUE.

XVI. Les Mémoires de l'Academie de 1701. pag. 30 &c. fourniſſent encore une ſixiéme Solution de ce Probl. 2. toute auſſi générale que les précédentes, ne renfermant (non-plus qu'elles) rien de conſtant. Outre les trois Formules des rayons oſculateurs qu'elles & celles du Probl. 1. donnent, ces Mémoires de 1701. pag. 38. en contiennent encore trois autres tirées de celles-là : les voici encore ici pour n'être pas obligé de recourir à ces Mémoires dans l'uſage qu'on en fait dans ceux-ci pag. 255. 280. & 281.

* Pour cela ſoit dans les Fig. 4. & 5. l'arc de cercle $DQ = z$, décrit du centre E & du rayon $DE = a$. Cela fait, on aura $EQ\ (a).\ EB\ (y) ::\ Qq\ (dz).\ BH\ (dx)$. Ce qui donnant $dx = \frac{y\,dz}{a}$, & $ddx = \frac{dy\,dz + y\,ddz}{a}$, il n'y aura qu'à ſubſtituer ces valeurs de dx & de ddx en leurs places dans les trois Formules des rayons oſculateurs trouvées dans les Solutions précédentes des Probl. 1. & 2. pour avoir les trois autres ſup-

* FIG. IV. V.

ſuppoſées ci-deſſus pag. 255. 280. 281. Les voici toutes ſix pour n'être pas obligé de recourir aux Mémoires de 1701. qu'on y ſuppoſe, & dans l'ordre des Formules des forces centrales où l'on s'en eſt ſervi : ſoient encore ces rayons appellez r.

Formules infiniment générales des Rayons oſculateurs.

$$1^{\circ}.\ r = \frac{ydyds^2}{dxdyds + ydsddx - ydxddx}.$$

$$2^{\circ}.\ r = \frac{ydxds^2}{dsdx^2 + ydyddx - ydsddy}.$$

$$3^{\circ}.\ r = \frac{yds^3}{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}.$$

$$4^{\circ}.\ r = \frac{adyds^2}{2dzdyds + ydsddz - ydzdds}.$$

$$5^{\circ}.\ r = \frac{aydzds^2}{ydsdz^2 + aadyddz - aadsddy}.$$

$$6^{\circ}.\ r = \frac{ads^3}{dzds^2 + dzdy^2 + ydyddz - ydzddy}.$$

Voilà ce que donnent les précédentes Solutions analytiques des Probl. 1. & 2. en voici préſentement une autre purement geometrique, laquelle ſuppoſant à l'ordinaire les élémens des Courbes & de leurs coordonnées ſucceſſivement conſtans, ſe trouve reſtrainte à ces conditions comme tout ce que j'ai vû juſqu'ici d'autres Solutions de pareils Problêmes, leſquelles n'ont d'univerſalité qu'autant qu'elles fourniſſent de formules générales pour chacune de ces hypothêſes, & non aucune qui convienne à toutes à la fois, comme font les formules précédentes, leſ-

leſquelles on voit pourtant avoir été aſſez faciles à trouver; mais on ne penſe pas à tout.

PROBLÊME III.

* *Soit encore une Courbe quelconque* DBY, *dont* AE, BE, CE, *ſoient trois ordonnées infiniment proches les unes des autres, leſquelles concourent avec toutes les autres au point* E, *duquel point (comme centre) ſoient décrits les arcs circulaires* AG, BH; *ſoient auſſi* BV, CV, *deux des rayons de ſa Dévelopée. De plus après avoir prolongé en* R *le petit côté* AB *de cette Courbe conſiderée ſous la forme de polygone infiniti-latere rectiligne, enſorte que* BR *en ſoit une touchante en* B, *ſoit fait l'angle* RBP *égal à l'angle* BEA; *& du point* B (*comme centre*) *l'arc* CON *qui rencontre la Courbe en* C, *ſa tangente en* N, *& la droite* BP *en* O, *laquelle eſt auſſi rencontrée en* P *par* EC *prolongée. Soient enfin faites* OQ *&* CM *paralleles à* BH, *avec* OK *&* ML *paralleles auſſi à* PH. *On demande préſentement de trouver par la ſeule Geometrie l'expreſſion générale des rayons oſculateurs* BV, CV, *&c. dans chacune des hypothêſes des élémens* BC, BH, CH, *ſucceſſivement conſtans.*

SOLUTION.

XVII. Puiſque *ABR* eſt (*hyp.*) une ligne droite, l'on aura l'angle $EBR = EAB + BEA = EAB + RBP$; & par conſéquent l'angle $EBP = EAB$. Donc en retranchant de part & d'autre les angles droits *EAG*, *EBH*, il

* FIG. VI.

il reſtera l'angle $GAB = HBP$. Ainſi les angles en G, H, K, L, étant (*hyp.*) droits, auſſi-bien que les angles COM ou COP, & KOQ; les triangles AGB, BHP, BKO, BLM, COP, CQO, & MOC, ſeront tous ſemblables entr'eux. Cela poſé,

1°. Si l'on ſuppoſe BC conſtante, c'eſt à dire $BC = AB$, les triangles ſemblables BKO, CQO, donneront $OK\ (CH).\ BO\ (BC)::\ OQ\ (HK).\ CO = \frac{BC \times HK}{CH}$. Et $BK\ (BH).\ BO\ (BC)::\ CQ.\ CO = \frac{BC \times CQ}{BH}$.

2°. Si l'on ſuppoſe BH conſtante, c'eſt à dire $BH = AG$, la reſſemblance des triangles BHP, COP, donnera de même $BP\ (BC).\ BH::CP.CO = \frac{BH \times CP}{BC}$. Et $HP\ (HC).\ BH::\ OP.\ CO = \frac{BH \times OP}{HC}$.

3°. Enfin ſi l'on ſuppoſe CH conſtante, c'eſt à dire $CH = BG$, la reſſemblance des triangles BLM, MOC, donnera auſſi de même $BM\ (BC).\ ML\ (CH)::\ MC\ (LH).\ CO = \frac{CH \times LH}{BC}$. Et $BL\ (BH).ML\ (CH)::MO.CO = \frac{CH \times MO}{BH}$.

XVIII. Donc les triangles (*conſtr.*) ſemblables CVB & CBN, AEG & NBO, donnant $BV.\ BC::\ BC.\ CN = \frac{BC \times BC}{BV}$. Et $AE.\ AG\ (BH)::BN\ (BC).NO = \frac{BC \times BH}{AE}$. Et par conſé-

séquent aussi $CO\,(CN-NO)=\frac{BC\times BC}{BV}-\frac{BC\times BH}{AB}$ $=\frac{AE\times BC\times BC-BC\times BH\times BV}{AE\times BV}$. Si l'on égale successivement cette derniére valeur de CO à chacune des six qu'on lui vient de trouver dans l'art. 17. l'on aura

Dans l'hypothèse de BC *constante*,

$1^{o}.\ \frac{BC\times HK}{CH}=\frac{AE\times BC\times BC-BC\times BH\times BV}{AE\times BV}$,

d'où résulte $BV=\frac{AE\times BC\times CH}{AE\times HK+BH\times CH}$.

$2^{o}.\ \frac{BC\times CQ}{BH}=\frac{AE\times BC\times BC-BC\times BH\times BV}{AE\times BV}$,

d'où résulte $BV=\frac{AE\times BC\times BH}{AE\times CQ+BH\times BH}$.

Dans l'hypothèse de BH *constante*,

$3^{o}.\ \frac{BH\times CP}{BC}=\frac{AE\times BC\times BC-BC\times BH\times BV}{AE\times BV}$,

d'où résulte $BV=\frac{AE\times BC\times BC\times BC}{AE\times BH\times CP+BH\times BC\times BC}$.

$4^{o}.\ \frac{BH\times OP}{HC}=\frac{AE\times BC\times BC-BC\times BH\times BV}{AE\times BV}$,

d'où résulte $BV=\frac{AE\times BC\times BC\times HC}{AE\times BH\times OP+BH\times BC\times HC}$.

Dans l'hypothèse de CH *constante*.

$5^{o}.\ \frac{CH\times LH}{BC}=\frac{AE\times BC\times BC-BC\times BH\times BV}{AE\times BV}$,

d'où réſulte $BV = \frac{AE \times BC \times BC \times BC}{AE \times CH \times LH + BH \times BC \times BC}$.

6°. $\frac{CH \times MO}{BH} = \frac{AE \times BC \times BC - BC \times BH \times BV}{AE \times BV}$,

d'où réſulte $BV = \frac{AE \times BC \times BC \times BH}{AE \times CH \times MO + BC \times BH \times BH}$.

Telles ſont les expreſſions purement geometriques des rayons oſculateurs de toutes ſortes de Courbes dans les trois hypothêſes précédentes; & *c'eſt tout ce qu'il falloit ici trouver.*

COROLLAIRE.

XIX. Voilà en général pour les Courbes dont les ordonnées partent d'un même point E; & par conſéquent en regardant ce point comme infiniment éloigné, c'eſt à dire, AE comme infinie, ainſi qu'elle le doit devenir dans le cas des ordonnées paralleles entr'elles, l'art. 18. donnera pour ce cas,

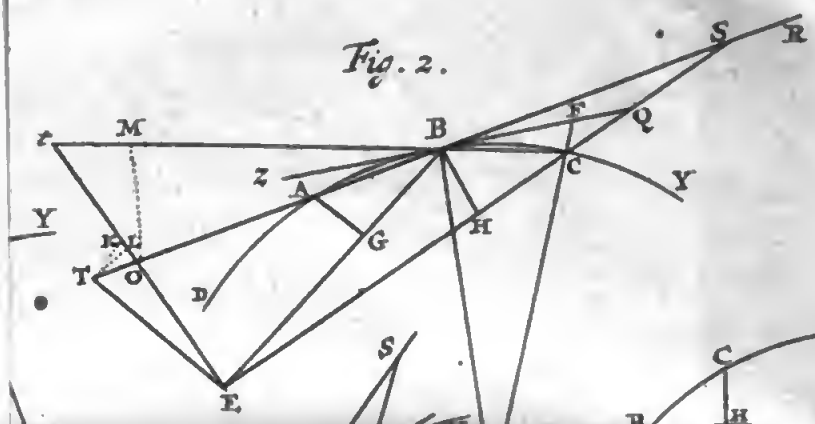
1°. (*nomb.* 1.) $BV = \frac{BC \times CH}{HK}$, & (*nomb.* 2.) $BV = \frac{BC \times BH}{C2}$, en ſuppoſant BC conſtante.

2°. (*nomb.* 3.) $BV = \frac{BC \times BC \times BC}{BH \times CP}$, & (*nomb.* 4.) $BV = \frac{BC \times BC \times HC}{BH \times OP}$, en ſuppoſant BH conſtante.

3°. (*nomb.* 5.) $BV = \frac{BC \times BC \times BC}{CH \times LH}$, &

(*nomb.*

Fig. 2.



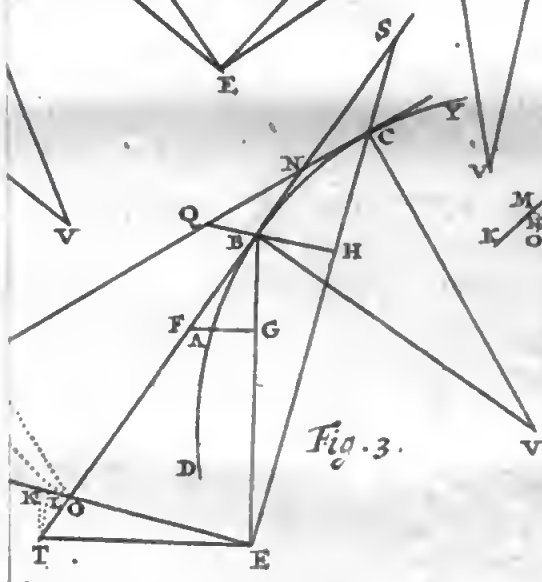


Fig. 3.

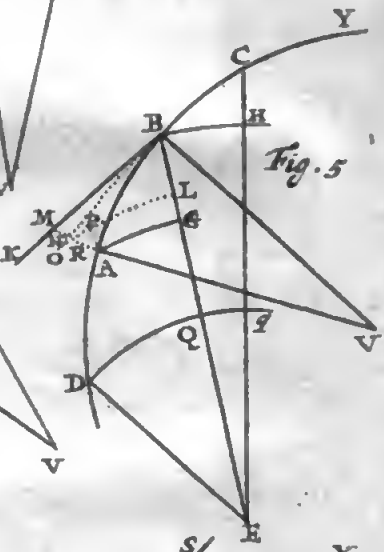


Fig. 5.

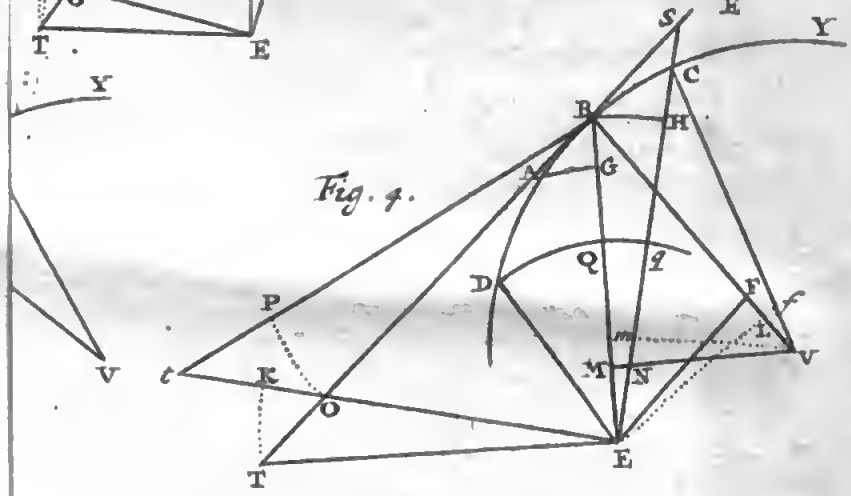


Fig. 4.

BIBLIOTECA NAPOLI EMANUELE III

(*nomb.* 6.) $BV = \frac{BC \times BC \times BH}{CH \times MO}$, en ſuppoſant CH conſtante.

SCHOLIE.

XX. Ces ſix derniéres formules pourroient encore ſe trouver ſeules par la même ſyntheſe que les ſix générales de l'art. 18. d'où elles ſe déduiſent. Et ſi l'on vouloit avoir le tout en termes analytiques, il n'y auroit qu'à appeller BV, r; AE ou BE ou CE, y; BG ou CH; dy; AG ou BH, dx; & AB ou BC, ds: Ce qui en prenant l'origine de tout cela du côté de D, donneroit $QC = -ddy$, $HK = ddx$, dans le cas de BC (ds) conſtante; $CP = -ddy$, $OP = -dds$, dans le cas de BH (dx) conſtante; & $LH = ddx$, $MO = dds$, dans le cas de CH (dy) conſtante: Et la ſubſtitution de tous ces noms dans les formules des art. 18. & 19. les rendroit toutes en termes analytiques, & les mêmes qu'elles réſulteroient des infiniment générales trouvées dans les Solutions des Prob. 1. & 2. ci-deſſus, en y ſuppoſant ſucceſſivement ds, dx, dy, conſtantes, & de plus enſuite y infinie pour le cas des ordonnées paralleles entr'elles. Tout cela eſt preſentement trop clair pour s'y arrêter davantage.

Au reſte je crois devoir avertir que la Démonſtration de l'art. 6. *pag.* 393. *des Mem. de* 1704. *eſt de M.* (Jean) Bernoulli.

ANALYSE CHIMIQUE DE L'EPONGE DE LA MOYENNE ESPECE.

PAR M. GEOFFROY.

* L'ANALYSE que Mrs. de la Societé Roiale de *Montpellier* ont faite des Plantes nommées *Lithophyton*, dont ils ont tiré une quantité assez considerable de sel volatil urineux, m'a fait soupçonner que cette espece de Plante marine ne seroit peut-être pas la seule qui fourniroit du sel volatil urineux. Dans cette pensée j'ai entrepris de travailler sur l'Eponge, qui est la Plante marine que j'ai trouvée le plutôt sous ma main.

Cette Eponge brûlée à la chandelle ou sur les charbons sent la corne ou les cheveux brûlez.

Une livre d'Eponge prise dans un temps humide, après avoir été sechée dans une étuve & separée autant qu'il est possible du sable & de la terre qu'elle contenoit, s'est trouvée réduite à onze onces. Ces onze onces de matiere ont été distillées à feu gradué. On a separé toutes les substances qui sont venues par la distillation, & on a rectifié le sel & l'esprit ; après quoi il s'est trouvé une once quatre gros & demi de phlegme roussâtre, ou d'esprit fort foible qui avoit un peu d'odeur & de saveur, une once &

* 22. Decembre. 1706.

& demi d'eſprit volatil urineux, une once quatre gros & demi de ſel volatil urineux, une demi-once d'huile fetide épaiſſe, demi-once de ſel fixe, qui contenoit outre l'alcali lixiviel un peu de ſel marin, & cinq onces de tête-morte, dans laquelle aïant paſſé le coûteau aimanté, il s'eſt rencontré quelques parcelles de fer.

Le poids de ces matieres raſſemblé fait en tout dix onces cinq gros ; par conſéquent il y a eu trois gros de perte, tant par la diſſipation des eſprits, que parceque les vaiſſeaux retiennent toûjours quelque peu des matieres.

Par cette Analyſe comparée avec celle que M. *Tournefort* a faite de la Soye rapportée dans les Memoires de 1700, pag. 91. l'Eponge donne preſqu'autant de ſel volatil que la Soye, qui eſt de toutes les matieres tirées des animaux celle qui en donne le plus. Car quinze onces de Soye ont donné deux onces deux gros de ſel volatil concret, & onze onces d'Eponge en ont produit une once quatre gros & demi, ce qui ne fait environ que quatre grains de difference pour once, ce qui eſt peu de choſe.

Il eſt fait mention dans la Pharmacopée de *Bathe* de ce ſel volatil d'Eponge, ſans marquer cependant que cette Plante en fourniſſe une ſi grande quantité. L'Auteur de ce Livre recommande fort l'eſprit & le ſel volatil d'Eponge pour la gravelle, les tumeurs ſcrophuleuſes & les goetres, & ſon ſel fixe comme un excellent antinephretique.

OBSERVATION ANATOMIQUE.

PAR M. GEOFFROY.

* UN homme après avoir été attaqué pendant deux ans d'accès de phrenesie très-violens, mourut d'un abcès au foye.

On trouva à l'ouverture de son corps outre l'abcès du foye qui étoit assez considerable pour contenir les deux poings, trente-trois petites pierres dans la vesicule du fiel, dont les unes étoient grosses comme des noyaux de nesle, & les autres à peu près comme des grains d'orge, toutes de figure irreguliere, legeres, friables, inflammables, & qui ne parurent que de la bile épaissie & grumelée.

Après avoir levé le crane avec peine à cause de la forte adherence de la dure-mere, on apperçût cette membrane beaucoup plus épaisse & plus ferme qu'elle ne l'est ordinairement.

Cette partie qu'on nomme la faux à cause de sa figure, étoit ossifiée presque dans toute sa longueur; ou plûtôt cette membrane paroissoit revêtue presque partout de lames osseuses. On pouvoit en quelques endroits les separer aisément de la membrane sans la rompre, en d'autres elles y étoient tellement unies qu'on ne pouvoit les détacher sans la détruire, & en quelques-uns on ne distinguoit point du tout la membrane de la substance osseuse. Ces lames étoient fort inégales & raboteuses, aiant dans quelques endroits deux à trois lignes d'épaisseur.

L'ex-

* 22. Decembre 1706.

L'extrémité de cette faux oſſeuſe étoit fortement attachée à l'épine ou crête de l'os ethmoïdes, de maniére qu'on ne pût la détacher ſans la rompre.

La pie-mere étoit plus épaiſſe qu'à l'ordinaire, elle avoit preſque la même fermeté qu'a coûtume d'avoir la dure-mere dans les autres ſujets. On la levoit avec facilité de deſſus la ſubſtance du cerveau, même dans les anfractuoſitez, & elle étoit toute parſemée de vaiſſeaux ſanguins fort engorgez de ſang.

La ſubſtance du cerveau étoit fort deſſechée, & beaucoup plus ferme qu'elle ne l'eſt ordinairement. Ses circonvolutions, qui imitent aſſez bien celles des menus inteſtins, y étoient d'autant plus diſtinctes que les ſillons entre ces circonvolutions étoient devenus larges & profonds par le deſſechement du cerveau. Nonobſtant ce deſſechement on a trouvé dans les ventricules une ſerosité aſſez abondante.

La ſubſtance du cervelet avoit conſervé ſa conſiſtance naturelle.

Cet homme qui avoit paſſé ſa vie dans des applications continuelles qui demandoient beaucoup de contention d'eſprit, avoit fait auſſi un fort grand uſage du vin & des liqueurs ſpiritueuſes; & c'eſt à cet uſage outré que l'on peut attribuer la principale cauſe de ſa maladie, & du deſordre qui s'eſt trouvé dans la tête & dans le foye.

Le mal que peut faire dans nous l'uſage des liqueurs ſpiritueuſes eſt très-conſiderable. Ce malade l'avoit éprouvé pendant ſa maladie pluſieurs fois dans une circonſtance particuliere. Car aiant été obligé de lui donner quelques teintures d'Opium pour calmer des inſomnies fâ-

fâcheuſes qui accompagnoient ſes accès de phreneſie, toutes les fois qu'on lui donnoit les teintures avec l'eſprit de vin, non-ſeulement il n'étoit point calmé, mais il tomboit dans des accès encore plus violens, au lieu que les teintures avec l'eau le calmoient & lui donnoient quelques heures de ſommeil.

On n'eſt pas aſſez perſuadé de ce mauvais effet des liqueurs ſpiritueuſes, & même de l'uſage immoderé du vin. Prévenu en faveur de ces liqueurs qui flatent très-agréablement le goût, chacun croit prendre des forces & de la vie en les prenant, & on ne s'apperçoit pas qu'elles ne paroiſſent fortifier qu'en augmentant le reſſort des fibres, & qu'elles l'augmentent quelquefois à un point qu'elles les rendent trop roides & même tout à fait oſſeuſes : qu'elles épaiſſiſſent tous les ſucs du corps, qu'elles les coagulent quelquefois juſqu'à les convertir en pierre ; & que c'eſt par-là que ces liqueurs engendrent la goutte, la gravelle, la pierre, & qu'elles cauſent des vapeurs, des affections convulſives, des rhumatiſmes, des apoplexies, & des paralyſies. Une ſeule experience peut convaincre de cette verité.

Si on verſe ſur la ſeroſité du ſang de l'eſprit de vin bien rectifié, cette ſeroſité qui eſt claire ſe grumelle auſſitôt, & ſe caille en une maſſe blanche, qui ſe durcit peu à peu comme du blanc d'œuf cuit, ſi on la tient à une legere chaleur de digeſtion. L'eſprit de vin caille la bile de la même maniere. On peut juger delà ce que l'on doit attendre de l'uſage immoderé du vin, & encore plus des liqueurs ſpiritueuſes que l'on en tire.

OBSERVATIONS

De l'Eclipſe de Lune du 21 *Octobre* 1706. *faites à* Marſeille *& à* Bologne.

PAR M. MARALDI.

* NOUS avons reçû deux Obſervations de l'Eclipſe de Lune du 21 Octobre dernier, dont nous ne pûmes obſerver rien de précis à l'Obſervatoire, à cauſe que la Lune pendant l'Eclipſe étoit dans des nuages, qui ne permettoient pas de voir les taches ni le terme de l'ombre que confuſément; de ſorte que nous ne pûmes déterminer les phaſes avec aſſez d'évidence.

Une de ces Obſervations a été faite à *Marſeille* par le P. *Laval* & par M. *Chazelles* dans l'Obſervatoire des PP. Jeſuites. Voici ce qu'ils en ont écrit.

On n'eſperoit pas d'obſerver cette Eclipſe, le Ciel aiant été fort couvert l'après-midi du 21; mais la pluie aiant ceſſé ſur les ſix heures du ſoir, & le vent étant ſauté du Sud-Eſt au Sud-Oueſt aux nuages, quoiqu'à la terre il fût toûjours Sud-Eſt, il ſe fit quelques ouvertures aux nuages qui donnerent lieu d'obſerver les phaſes ſuivantes. Les Lunettes dont on s'eſt ſervi ſont de trois pieds, ce ſont les deux du quart de cercle qui ſont excellentes.

A ſix heures 29′ 30″ la Lune paroiſſant entre des nuages étoit déja éclipſée d'environ deux doigts;

* 22. Decembre 1706.

doigts; mais on ne pouvoit pas diſtinguer par quelles taches l'ombre paſſoit.

A $6^h\ 46'\ 30''$ la mer Caſpie éloignée de l'ombre de la diſtance de ſon grand diametre.

A $7^h\ 47'\ 30''$ la Lune paroiſſant foiblement à travers des nuages étoit éclipſée de plus de deux tiers; mais on ne diſtinguoit pas aſſez l'ombre de la penombre à cauſe des nuages.

A $8^h\ 2'\ 0''$ Copernic touche l'ombre & commence à ſortir.
4 26 Ariſtarchus ſur le bord de l'ombre.
6 21 Copernicus tout dehors.
7 0 Petavius ſur le bord de l'ombre.
9 37 Catharina ſur le bord de l'ombre.
13 15 Eratoſthene hors de l'ombre.
15 36 Inſula ſinus medii hors de l'ombre.
18 21 Langrenus ſur le bord de l'ombre.
20 0 Heraclides hors de l'ombre.
21 7 Timocaris hors de l'ombre.
21 46 Harpalus hors de l'ombre.
24 21 Helicon ſort de l'ombre.

Le Ciel étant ſerein l'ombre paroiſſoit bien tranchée lorſqu'on obſervoit ces taches; mais de foibles nuages aiant de nouveau couvert la Lune empêcherent de bien diſtinguer les taches pendant un temps conſiderable, & furent cauſe que l'ombre & la penombre étoient confondues.

A $8^h\ 37'\ 35''$ Langrenus entierement ſorti, cette tache a demeuré long-temps ſur le bord de l'ombre.

29′ 2″ Poſſidonius & Teruntius hors de l'ombre.
44 26 La mer Caſpie commence à ſortir.
47 19 Proclus hors de l'ombre.
50 16 La mer Caſpie entierement hors de l'ombre.
52 16 Fin de l'Eclipſe à la Lunete.

Le Ciel étoit ſerein & l'ombre bien tranchée pendant qu'on obſervoit ces dernieres taches. L'Eclipſe a fini entre la mer *Caſpie* & *Meſſala*, mais plus près de *Meſſala*; l'horloge avoit été reglée par des hauteurs correſpondantes du Soleil, & on connoiſſoit ſon état par une ſuite de hauteurs correſpondantes priſes depuis le commencement du mois de Septembre.

L'autre Obſervation a été faite à *Bologne* dans l'Obſervatoire de M. le Comte *Marſigli* par Mrs. *Manfredi* & *Stancari*. Ils obſerverent cette Eclipſe par deux Lunetes de huit pieds, dont une ſervoit à marquer l'arrivée de l'ombre aux taches de la Lune, l'autre à marquer la grandeur de l'Eclipſe en meſurant par un Micrometre la partie de la Lune qui reſtoit claire & ſon diametre apparent.

Ils ne purent pas obſerver le commencement de l'Eclipſe à cauſe des nuages.

A 7h 36′ la Lune commence de paroître entre les nuages quand ſa partie éclipſée étoit déja aſſez grande.

Voici le détail de ce qu'ils obſerverent comme nous l'avons reçû.

7h 43′ *Deficiebat paulo plus quàm dimidia.*
7 52 50 *Umbra per Grimaldum, cujus adhuc notabilis pars latet.*

7h

7h 56′ 10″ *Pars illuminata in minutis & ſecundis circuli maximi.* 11′ 30″.
7 56 30 *Ricciolus totus exit ab umbra.*
8 2 30 *Pars illuminata* 11′ 23″ : *tunc fuit maxima obſcuratio.*
8 3 0 *Umbra tangit Fracaſtorium & tranſit per Petavium.*
8 5 10 *Pars illuminata.* 12′ 10″.
8 8 30 *Pars Lunæ Lucida.* 12 10.
8 9 30 *Galileus exit.* 1 11.
8 11 30 *Pars Lunæ illuminata.* 12 21.
8 16 37 12 55.
8 20 30 13 41.
8 24 20 14 26.
8 25 48 *Ariſtarchi medium exit.*
8 28 0 *Pars Lunæ illuminata.* 15 34.
8 29 0 *Umbra per medium Copernici.*
8 31 0 *Totus Copernicus exit.*
8 32 30 *Pars Lunæ illuminata.* 16 43.
8 38 0 17 44.
8 42 15 *Heraclides exit.*
8 44 30 *Pars Lunæ illuminata.* 19 46.
8 46 0 *Harpalus exit.*
8 47 20 *Dionyſius exit.*
8 48 0 *Pars Lunæ illuminata.* 21 17.
8 49 0 *Manilius exit.*
8 51 20 *Pars lucida Promontorii acuti exit: pars Lunæ illuminata,* 22 49.
8 52 55 *Menelaus exit.*
8 53 40 *Plato incipit.*
8 54 30 *Pars Lunæ illuminata.* 23 25.
8 54 30 *Totus Plato exit.*
8 56 0 *Langrenus totus exit.*
8 57 15 *Plinius exit.*
8 59 2 *Teruntius exit.*
8 59 20 *Pars Lunæ illuminata.* 25 15.

9h

9h	1′	55″	*Eudoxi medium emergit.*		
9	2	0	*Pars Lunæ illuminata.*	26′	43″.
9	2	30	*Ariſtotelis medium emergit.*		
9	4	45	*Poſſidonii medium emergit.*		
9	6	35	*Incipit mare Criſium.*		
9	6	30	*Pars Lunæ illuminata.*	28	23.
9	6	40	*Proclus exit.*		
9	10	20	*Medium maris Criſium.*		
9	10	45	*Pars Lunæ illuminata.*	30	25.
9	13	25	*Hermes totus emergit.*		
9	14	30	*Totum mare Criſium.*		
9	17	55	*Finis uno tubo.*		
9	18	20	*Finis altero tubo.*		
9	30	0	*Diameter Lunæ fuit.*	33	42.
9	18	20	*Diameter fuit.*	33	50.

REFLEXIONS.

La fin de l'Eclipſe fut obſervée à *Marſeille* à 8h 52′ 16″. Si on ôte de cette Obſervation 12 minutes pour la difference des meridiens, on aura la fin de l'Eclipſe à *Paris* à 8h 40′ 16″ à peu de ſecondes près de celle qui eſt marquée dans la *Connoiſſance des Temps.*

La fin de l'Eclipſe à *Bologne* a été obſervée par une Lunete à 9h 17′ 55″, & par l'autre à 9h 18′ 20″. Aïant ſuppoſé la difference des meridiens de 36′ comme on l'a déterminée, on aura la fin de l'Eclipſe à *Paris* à 8h 41′ 25″, & à 8h 45′ 50″ par l'autre; ce qui eſt à une demie minute près de celle qui eſt marquée dans la *Connoiſſance des Temps.*

La plus grande phaſe de l'Eclipſe obſervée arriva à 8h 2′ 30″, quand la partie claire de la Lune étoit de 11′ 23″; & une demie-heure après le diametre apparent de la Lune fut obſervé

vé de 23′ 42″, qui devoit être plus grand de quelques ſecondes qu'au temps de cette phaſe. Negligeant cette petite difference qui ne peut pas être ſenſible dans la détermination des doits éclipſez, la partie éclairée de la Lune étoit de 4 doits 3′ de doit, & par conſéquent la partie éclipſée étoit alors de 8 doits moins 3 minutes de doit. Cette grandeur de l'Eclipſe s'accorde aſſez bien à celle qui fut eſtimée à *Marſeille* vers la même heure. La plus grande phaſe obſervée à *Bologne* a été 4 minutes après le milieu déterminé par la *Connoiſſance des Temps*. Par les Obſervations de *Bologne* la grandeur de l'Eclipſe a été d'un demi doit plus grande que par la *Connoiſſance des Temps*, & par l'Obſervation de *Marſeille* un peu plus d'un demi doit.

Fin des Memoires de l'Année 1706.

ERRATA

Pour l'Hiſtoire de 1705.

PAge 106. *ligne penult.* 24. 720. *liſez* 24. 120. 720.

Pag. 110. *ligne* 4. *effacez deux fois* d'une unité.

ERRATA

Pour les Memoires de 1705.

PAge 337. *ligne* 19. ordinairement, *liſez* évidemment.

Pag. 341. *lig.* 4. du côté *C. liſ.* du côté du point *C.*

Pag. 343. *lig.* 8. $\frac{a^4bb+2aab^3+bc}{a^4-2aabb+b^4}$ *liſ.* $\frac{a^4bb+2aab^3+b^5}{a^4-2aabb+b^4}$.

CA-

CATALOGUE DES LIVRES

Qui ont été imprimez en 1706 & qui ſe trouvent à Amſterdam chez PIERRE DE COUP, à un prix raiſonnable.

L'Abbé en belle humeur, Nouvelle Galante. 12.
Abregé de l'Hiſtoire d'Eſpagne & de France, par demandes & réponſes. 12.
Aicheri (Otton.) *Epitome Chron. Hiſtoria Sac. & Prof.* 4.
Albert le grand, ſes admirables ſecrets. 12.
Alexandri (Nat.) *Expoſitio quatuor Evangeliſtarum.* Fol. Paris.
Les Amans de Sienes, où les Femmes font mieux l'Amour que les Veuves & les Filles. 8.
——— Cloîtrez ou l'heureuſe Inconſtance. 12.
Amour à la Mode. ſatyre hiſtorique. 12.
——— d'Eumene & de Flora. 12.
Ancillon (Ch.) Hiſtoire de la Vie de Soliman II. Empereur des Turcs. 8.
Apologie du Card. de Bouillon. 12.
Arndii (Car.) *Bibliotheca Aulico-Politica, eaque ſelecta.* 8.
Art de vivre content par l'Auteur de la Pratique des Vertus Chrétiennes. 12.
——— de voler ſans aîles. 12.
Avantures ſecretes & plaiſantes. 12.

BAieri (Jo. Gisb.) *Compendii Theologiæ Poſitivæ Synopſis.* 8.
Barbette (Paul.) *Opera omnia, ſtudio* Jo. Jac. Manti. 4.
Barbeyrac (J.) ſa Traduction du Droit de la Nature & des Gens de *Puſendorf*, avec des Notes. 2 voll. 4.
Bardili (Burkh.) *Concluſiones Theor. Pract. ad* XXV. *Pandect. Lib. poſteriores.* 4.
Baſnage (Jaques) L'Hiſtoire & la Religion des Juifs depuis J. C. juſqu'à preſent. 5 voll. 12.
Baſſean (Bonav.) *Theophilus Parachialis.* 12.
Bayle (Pierre) Réponſe aux Queſtions d'un Provincial. Tome IV. 12. [*Le V. a paru en* 1707. *après la mort de l'Auteur.*]
Bebelii (Balth.) *Eccleſia antediluviana vera & falſa ex Antiq. Moſaïcis erutâ.* 4.

——— *Hiſto-*

——— *Hiſtoria Eccleſiæ Noachica Eccleſiæ Chriſt. ſuffragio illuſtrata.* 4.

Bechmanni (Frid.) *Annotationes ad* Jo. Olearii *Theologiam moralem.* 4.

Becman (Jo. Chriſt.) *Catalogus Biblioth. publ. Univerſ. Francofurtana.* Fol.

Bellegarde (l'Abbé de) Reflexions ſur l'élegance & la politeſſe du ſtile. 12.

Bergeri (Jo. Henr.) *Electa Diſcept. Forenſium Saxon.* 4.

——— *Supplementa ad Electa Proceſſus executivi &c.* 4.

Berniera (Jo. Aug.) *Hiſtoria Eccleſ. à Reformatione Zwinglii & Lutheri ad noſtra tempora Compendium.* 8.

Bibliotheca Antiqua Jenæ publicata, Menſ. Octob. Nov. Decemb. 1705. & Januar. Febr. Mart. 1706. 4

Boileau aux priſes avec les Jeſuites, & Eclairciſſemens ſur les Oeuvres de ce Poëte. 12.

Bos (Lamb.) *Obſervationes Miſcellaneæ ad Loca quædam cum N. Fœderis, tum exterorum Scriptorum Græcorum.* 8.

Boſſuet (J. Ben.) Evêque de Meaux, Explication de la Prophetie d'Iſaïe ſur l'Enfantement de la S. Vierge, &c. 12. Paris.

Brenkman (Henr.) *de Eurematicis Diatriba, ſive in Heremi Modeſtini librum de Eurematicis Commentarius.* 8.

Brochmanni (Caſp. Eraſmi) *Commentarius in Epiſt. ad Hebræos.* 4.

——— *in Epiſt. Jacobi.* 4.

Buchneri (Aug.) *Orationes Academicæ.* 8.

Buddæi (Jo. Franc.) *Analecta Hiſtoriæ Philoſophicæ.* 8.

C. Jul. Cæſaris *quæ exſtant omnia ex recenſ.* Jo. Davizii *cum ejuſdem animadv. & Not.* P. Ciacconii, Fr. Hotomanni, *& aliorum.* 4. Cantabrigiæ.

Calmete (Franc.) *Riverius reformatus, ſive Praxis Medica Methodo Rsver. 2. voll.* 12.

Cantenac, Satyres nouvelles. 12.

Caracteres de la Famille Royale, des Miniſtres d'Etat & des principales perſonnes de la Cour de France. 12.

Carocii (Vinc.) *Tractatus de Locatione & Conductione.* 8.

Carreræ (Franc.) *Lyricorum Libri IV. & Epodon Liber unus.* 12.

Chauſſe (Mic. Ang. de la) le Grand Cabinet Romain. *Fol.* avec Fig.

Cocceii (Jo.) *Opera anecdota Theologica & Philologica. 2. voll.* Fol.

Codex Fabrianus Definitionum For. & rerum in Sabaudia Senatu tractarum. Fol.

Colerus (J.) Vie de Spinoſa & la Verité de la Reſurrection de J. C. defendue contre lui. 8.

Comines (Phil. de) ſes Memoires. N. Ed. 2. voll. 8.

Com-

Commelini (Casp.) *Horti Medici Amstel. Plantæ rariores & exotica ari incisæ.* 4.

Le Comte de Soissons, Nouvelle Galante. 12.

Concordia & Confessio Fidei & Doctrina Lutheranorum.

Corpus Juris Civilis, cum Notis Dion. Gothofredi. *Ed. N.* 4.

Costa (Jo. Alvarez da) *Aquila Augusta trisulco ebarmata fulmine, seu Carolus III. Hispan. Rex assertus.* Fol.

Critique d'un Livre intitulé *la Telemacomanie.* 12.

Croix (de la) Nouv. Methode pour apprendre la Geographie 5 voll. 12. *Paris.*

Cunradi (Jo. Henr.) *Silesia Togata.* 4.

Cygne (Mart. du) *De Arte Poetica Libri duo.* 12.

Dacier (Mad.) Comedies de Terence traduites en François avec des Remarques. 4. Ed. 3. voll. 12.

Dacier (Andre) Vie de Pythagore, ses Symboles, ses vers dorez, & la Vie d'Hierocles. 2 voll 12. *Paris.*

——— Reflexions Morales de Marc Antonin. N. Ed. 2 voll. 8

Daniel (le P.) Voyage du Monde de Descartes avec la suite. Nouv. Ed. 12.

Dannhaveri (Jo. Conr.) *Theologia Casualis.* 8.

Danzii (Jo. Andr.) *Compendium Grammatica Hebraa-Chaldaïca.* 8.

Défense de la Conciliation de Moyse avec S. Etienne contre les Lettres Critiques de Mrs. *Marolles* & *Masson.* 8.

Delicia sive Amœnitates Daniæ, Norvegiæ, &c. 12. fig.

——— *Suecia, Gothica & Ducatus Finlandiæ.* 12. Fig.

Dictionaire François & Flamand formé sur celui de *Richelet.* 4.

Dirckinck (Jo.) *Semita perfectionis purgativa, illuminativa & unitiva.* 12.

Les Disgraces des Amans. Nouvelle Historique. 12.

Dorschei (Jo. Georg.) *Commentarius in 4 Evangelistas* 4.

Elffen (Nic.) *Scintilla Cordis.* 12.

Elite de bons Mots recueillis des Livres en *Ana.* 12.

Ennii (Q.) *Fragmenta ab* Hier. Columna *conquisita, disposita & explicata. Accurante* Fr. Hesselio. *In fine subnectuntur eadem Fragmenta prout à* P. Merula *olim edita sunt.* 4.

Entretiens Solitaires d'une Ame devote avec son Dieu. 12.

Epistolium unum Epistoliorum dulcissimorum dulcissimum. 4.

Epitome totius Medicinæ, addita est Th. Zuingeri *Dissertatio de adquirenda vita longitudine.* 8.

l'Esprit de Seneque, ou les plus belles pensées de ce Philosophe. 12.

Etat du siege de Rome dès le commencement du siecle passé jusqu'à present avec une idée du Gouvernement & des Maximes Politiques de la Cour de Rome. 3 voll. 12.

Evremond (Saint) ses Oeuvres avec le Mêlange Curieux des

meilleures Pieces qui lui ont été attribuées, & d'autres Ouvrages rares ou nouveaux. 7 voll. 12.

Fauſtii (Jo. Mich.) *Philaletha illuſtratus, ſive Introitus apertus ad occluſum Regis palatium.* 8.

Felibien (le Pere & le Fils) Entretiens ſur les Vies & les Ouvrages des Peintres, & Recueil hiſtorique de la Vie & des Ouvrages des Architectes. N. Ed. augmentée des Plans & Deſcriptions des deux plus belles Maiſons de campagne de Pline le Conſul. 7 voll. 12.

Floerckii (H. Ern.) *Annotationes ad Syntagma Civile Struvianum.* 4.

Fontenelle, voyez *Hiſtoire de l'Academie des Sciences.*

La France Galante ou hiſtoires amoureuſes de la Cour. 2 voll. 12.

Friſii (Jo.) *Dictionarium Lat. Germ. & Germ. Latinum.* 8.

Fromentin, Traité du Bonheur. 12.

Gagnier (J.) L'Egliſe Rom. convaincue de Depravation, d'Idolatrie &c. 8.

Galland, les Mille & une Nuit, Contes Arabes traduits en François. Tom. V & VI. 12.

Garzi (Jac.) *Compendium Theologiæ Moralis*, Barth. Maſtrii. 12.

Gellii (Auli) *Noctes Atticæ, cum Notis* Oizelii, Thyſii & Gronoviorum. 4.

Gerbezii (Marci) *Chronologia Medica annus IV.* 4.

Germon (Barth.) *de Veteribus Regum Franc. Diplomatibus Diſceptationes adverſus* Jo. Mabillonium &c. 12. Paris.

Gerresheim (Pet.) *Clavis Alphabetica, ſive ſedes materiarum Juris univerſi.* 12.

Gervaſii Briſacenſis *Curſus Theologicus.* 8.

Geyſſ (Guil.) *Lapis Offenſionis & Petra Scandali adverſariis Sententiæ* Jo. Duns Scoti. 4.

Goffine (Leon.) *Cibus Animæ matutinalis, diurnus, veſpertinus, Hebdomadarius*, &c. 12.

Grimareſt, Les Campagnes de Charles XII. Roi de Suede Tome II. [*Le III. a paru en* 1708.]

Guerres d'Eſpagne, de Baviere & de Flandres. 12. [*La II. Ed. augmentée a paru en* 1708.]

—— d'Italie. 12. [*La II. Ed. en* 1708.]

Hartſoeker (Nicolas) Conjectures Phyſiques. 4.

Heer (Martini) *Phyſiologia Helmontiana, ſive Tractatus X de Archeo.* 4.

Herfeld (H. G.) *Cogitata de Origine Morborum.* 8.

Hiſtoire d'Apollone de Tyane convaincue de fauſſeté. 12. *Paris.*

—— de la Conjuration de Naples en 1701. 12.

—— d'Hyppolite Comte de Douglas. 12.

—— de l'Academie Royale des Sciences avec les Memoires de

de Mathematique & de Phyſique pour les années 1699, 1700, 1701, 1702. 12. chaque Année un vol. [*Les Années 1703, 1704, 1705. ont paru en* 1707, *& l'Année* 1707. *eſt préſentement (en* 1708.) *ſous preſſe.*]

——— de la Conquête des Iſles Moluques, par les Eſpagnols, Portugais & Hollandois. 12. 3 voll. fig.

——— de la Virginie, traduite de l'Anglois d'un Auteur natif du Pays. 12.

Hiſtoria Morborum qui ann. 1699. 1700. 1701. *Vratiſlavia graſſati ſunt, à Colleg. Acad. Leopold. Nat. Curios. edita.* 4.

Homeri *Opera omnia, Græcè & Lat. Curantibus* Lederlino & Berglero. 2 *voll.* 12.

Huberi (Zachar.) *Diſſertationum Juridic. & Philolog. Pars altera.* 4.

Hulſii (Henr.) *Melchiſedecus.* 8.

Hunnii (Ægid.) *Theſaurus Evangel. complectens Commentarios in IV Evang. & Act. Apoſt. Editus à* Jo. Henr. Feuſtkingio. *Fol.*

Jaquelot, Examen de la Theologie de Mr. Bayle, où l'on defend la Conformité de la Foi avec la Raiſon. 12.

Jardinier Solitaire, ou methode de faire & cultiver un Jardin fruitier & potager. 12. *Paris.*

Idée d'un Regne doux & heureux, ou Relation du Voyage du Prince de Montberaud dans l'Iſle de Naudely. 12. *fig.*

Introductio in Jus publicum per axiomata propoſita. 8.

Joncourt, (de) Entretiens ſur les differentes Methodes d'expliquer l'Ecriture & de prêcher des Cocceiens & des Voetiens dans les Provinces Unies. 12.

Jonſtoni (Arturi) *Pſalmorum Davidis Paraphraſis Poetica.* 12.

Joſepho (Oct. Maria à Sancto) *Interrogationes brevéſque Reſponſiones ad Caſus Conſcientiæ.* 8.

Ittigii (Thom.) *Hiſtoria Synodorum Nationalium in Gallia habitarum Obſervationibus Theol. illuſtrata.* 4.

Jurieu, le Philoſophe de Rotterdam accuſé, atteint & convaincu. 12.

Juſtinus, *Ed. N. var. Lect. & Indice locupletior.* 24.

King, *Hiſtoria Symboli Apoſtolici cum Obſervationibus Eccleſ. & Criticis.* 8.

Klauſing (Henr.) *de optima Temporum Emendatione Tractatus.* 4.

Kornmanni (Henr.) *Tractatus de Virginitate, Virginum ſtatu & Jure.* 12.

Kromayeri (Jo. Ab.) *Diſquiſitiones memoriales Librorum & Capitum Biblicorum. V. & N. Teſt.* 8.

Kummet (Caſp.) *Magiſtra Scientiarum Scripturæ ſac. compendio explicata ad uſum fidelium potiſſimùm Sacerdotum.* 4.

L'Abbe (Petr.) *Elogia ſacra Theol. Philol. Hiſt. & Poetica.* 8.
Landaſe (Nic. de) Grammaire Fr. & Allemande. 8.
Larrey, Hiſtoire d'Angleterre, d'Ecoſſe & d'Irlande, du commencement de l'ancien Regne des Bretons, juſques à la fin du Regne de Richard III. 2 voll. *Fol.*
Lauterbach (W. A.) *Collegii Theor. Practici ad Pandectas, Pars ſecunda.* 4.
Lindenbrogii (Erp.) *Scriptores Septentrionales*, P. Lambecii *Origines Hamburg.* & Theod. Ankelmanni *Inſcriptiones Hamburg.* Fol.
Loeſcheri (Val. Ern.) *de Cauſis Linguæ Hebraïcæ.* 4.
——— *Ion ſive Origines Gracia reſtaurata.* 8.
Loeſelius (Jo.) *Flora Pruſſica, ſive Planta in Regno Pruſſiæ naſcentes curante* Jo. Gottſched. 4.
Luillier, Voyage aux grandes Indes, avec une Inſtruction pour le Commerce des Indes Orientales. 12.
MAii (Jo. Henr.) *Theologia Jeſaiana.* 4.
——— *Oeconomia Temporum V. Teſtamenti.* 4.
Mailhat (Raym.) *Summa Philoſophiæ Thomæ Aquin.* 8.
Manzii (Caſp.) & Martini (Frid.) *Opus de Eo quod intereſt.* 4.
Marckii (Jo) Hiſtoria Paradiſi illuſtrata. 4.
——— *Exercitationes Biblicæ.* 4.
Maximi Tyrii *Diſſertationes, Gr. Lat. ex interpr.* Dan. Heinſii, *recenſuit & Notis illuſtravit.* Jo. Daviſius. 8. Cantabr.
Meiſneri (Chriſt.) *Equites Siloſii honoribus Academicis fulgentes.* 4.
Memoires de M. L. C. D. R. contenant ce qui s'eſt paſſé de plus particulier ſous les Miniſteres de Richelieu & Mazarin. N. Ed. 12.
Meſſenii (Jo.) *Scandia illuſtrata, ſeu Chronologia de rebus Eccleſiaſticis & Pol. Suecia, Daniæ, &c. cum Obſerv.* Jo. Peringskiold. *Fol.*
Miſcellanea Curioſa Medico-Phyſica, Decuria tertia annus nonus & decimus. 4.
Montfaucon (Bern. de) *Collectio nova Patrum & Scriptorum Græcorum*, Euſebii Cæſarienſis, Athanaſii, Coſmæ Ægyptii. *Gr. Lat. cum Notis & Præfationibus.* 2 *voll.* Fol. *Paris.*
Moor (Barth.) *Oratio de Hypotheſibus Medicis.* 4.
Muſæi (Jo.) *Tractatus de Converſione Peccatoris ad Deum.* 4.
NEedham (Gualth.) *Obſervationes variæ Anatomicæ.* fig. 12.
Nepotis (Corn.) *Vitæ excell. Impp. cum Notis* Dav. Hoogſtraten. 12.
Neu (Jo. Chriſt.) *Mantiſſa ad Degores Wheat. Prælectiones hyemales.* 8.
Newton (Iſ.) *Optice. Accedunt duo Tractatus de ſpeciebus & Magnitudine figurarum Curvilinearum.* 4. Lond.

Ni-

Nicolai (Jo.) *Tractatus de Synedrio Ægyptiorum illorumque Legibus insignioribus.* 8.

Nicole, Instructions Theol. & Mor. sur le Symbole. 12.

——— sur l'Oraison Dominicale, la salutation Angelique & la Ste. Messe. 12.

Nodot, Memoires ou Observations pendant son Voyage d'Italie. 2 voll. 12.

Noguerol (Pet. Diez) *Allegationes Juris.* Fol.

Noodt (Ger.) *Observationum Libri duo.* 4.

——— *Dissertatio de Religione ab Imperio Jure Gentium libera.* 4.

[Cette Dissertation a été traduite en François par M. *Barbeyrac*, & imprimée en 1707. *in* 12.]

Notes sur le Concile de Trente. 8.

Olivier (J.) Leçons Chrétiennes d'un Pere à ses Enfans. 8.

l'Opera de la Haye, Histoire instructive & galante. 12.

d'Outreman, *S. J. Padagogus Christianus, seu recta hominis Christiani institutio.* 2 voll. 8.

Pagenstecheri (Alex. Arn.) *Admonitoria ad Pandectas. Accedunt duæ Dissert. de Auctoribus Authenticarum Codici insert.* 8.

Pagi (Ant.) *Dissertatio Chron. de Periodo Græco-Rom.* 4.

Le Passetemps Royal, ou les Amours secrettes de Mad. de Maintenon. 12.

Paullini (Christ. Franc.) *Observationes Medico-Physicæ.* 8.

Piconio (Bern. à) *Epistolarum Pauli triplex Expositio, Paraphr. & Comment.* Fol. *Paris.*

Plumier (Car.) *Tractatus de Filicibus Americanis, Lat. & Gall.* Fol. *Paris.*

Le Poëte sans fard, ou Discours satiriques sur toutes sortes de sujets. 12.

Poiret (Petr.) *De Eruditione triplici, solida, superficiaria & falsa, item de Educatione Liberorum, de Irenico universali & de Theol. mystica idea generali.* 2 voll. 4.

Pollucis (Jul.) *Onomasticon, Gr. Lat. emendatum, suppletum & illustratum à* G. Jungermanno, J. Kuhnio, J. H. Lederlino & Tib. Hemsterhuis. 2 *voll.* Fol.

Rabbini ex Tenebris Talmudicis vocantes, sive Tractatus Mischna elegantissimus. 4.

Raisons des Scripturaires, par lesquelles ils font voir que les Termes de l'Ecriture suffisent pour expliquer le Dogme de la Trinité. 8.

Rechenberg (Adam.) *Appendix ad Libros Ecclesiæ Lutheranæ symbolicos adornata.* 8.

Regnier Desmarais, Traité de la Grammaire Françoise. 12.

Relandi (Hadr.) *Dissertationes Miscellaneæ de situ Paradisi, de mari rubro*, &c. 8.

Reineccii (M. Chriſt.) *Nucleus Theologiæ poſitivæ.* 8.
Relation de ce qui s'eſt paſſé à Munſter au ſujet de l'Election de l'Evêque d'aujourd'hui. 12.
——— d'un Voyage de Danemarc. 12.
Relation (Nouv.) de l'autre monde, ou Entretiens Pol. des Morts ſur les principes & les ſuccès de la Cour de France. 12.
Remarques critiques ſur l'Edition de 1704. du Dictionaire de Morery. 8.
Réponſe à un Memoire ſur l'état preſent des affaires de l'Europe, par rapport à la paix future. 8.
——— aux Eclairciſſemens ajoutez au Manifeſte de S. A. E. de Baviere & la Lettre de S. A. E. de Cologne à l'Empereur. 12.
Rogiſſart, Delices de l'Eſpagne & du Portugal. 5 voll. 12. fig.
——— d'Angleterre. 12.
Rohrmann (Chriſt.) *ominoſum nomen Vratiſlaviæ centum anagrammatibus.* 4.
Roque (P. de la) Recueil de diverſes dern. heures édifiantes. 12.
Rotarii (Th. Fr.) *Apparatus univerſæ Theologiæ Moralis. in* 8.
Rothii (Everh. Rud.) *Hiſtoria univerſalis uſque ad Ann.* 1706. 8.
Royer (Car. de) *Florilegium Oratorum complectens ſynonyma & Epitheta ex Cicerone aliiſque.* 8.
Ruyſchii (Fred.) *Theſaurus Anatomicus ſextus, Lat, & Belg. cum fig. æneis.* 4.
SChmidt (Seb.) *Comment. in Ep. Joannis, cum Analyſi Ep. ad Rom.* 4.
Schudt (Jo. Jac.) *Prudentia civilis & Peritia rei Militaris Exemplar vitæ Jephtæ.* 8.
Q. Sereni Samonici *de Medicina Præcepta ſaluberrima, ex emendatione* Rob. Keuchenii. 8.
Sfondrati (Cardin.) *Nodus Prædeſtinationis.* 8.
Sibbern (Nic.) *Schediaſma de Libris Latinorum Eccleſiaſticis.* 8.
Smith (Th.) *Vitæ Jac. Uſſerii, Jo. Coſini, Henr. Briggii, Jo. Bainbridgii, Jo. Gravii, Petr. Junii, Patr. Junii, Jo. Dee.* in 4.
Soldneri (Jo. Ant.) *Methodus medendi per ſimplicia.* 12.
Stahl (G. Ern.) *de ſenſu Naturæ circa curationes incongruas.* 4.
Starkii (H. Ben.) *Lux Grammatices Hebræa.* 8.
——— *Lux Linguæ Chaldaïcæ.* 8.
Storrius (Jo. Phil.) *de Vocum Carnis & Spiritus genuino ſenſu & uſu.* 4.
Strom (Chriſt.) *Ratiociniorum Mechanicorum in Medicina uſus vindicatus.* 8.
——— *Nova Theoria motuum reciprocorum Machinæ Animalis, ex partium organicarum ſtructura & proprietatibus.* 8.
Struvii (Frid. Gottl.) *Sylloge Controverſiarum civilium.* 4.

Stru-

Struvii (Burc. Gottl.) *Introductio ad Notitiam Rei literaria & usum Bibliothecarum.* 8.

——— *Acta litteraria ex Mſſ. eruta atque collecta. Faſciculus quartus,* 8.

Strykii (Sam.) *Tractatus de ſucceſſione ab inteſtato.* 4.

——— *Prælectiones Viadrinæ de Cautelis Contractuum neceſſariis.* 4.

——— *de Cautelis Juramentorum.* 4.

Sturm (Leon. Chr.) *de Natura & Conſtitutione Matheſeos.* 8.

Sturmii (Jo. Chriſtoph.) *Phyſica moderna ſanioris Compendium.* 8.

Superville (Daniel) Catechiſme ou Inſtruction dans la Religion Chretienne. 8. [*La ſeconde Edition de ce Catechiſme a paru en* 1708. *revûe par l'Auteur & augmentée d'un Abregé du Catechiſme.*]

Szent-ivany (Mart.) *Analyſis ſeu reſolutio XII. præcipuorum erroneorum Dogmatum in fide Modernorum Acatholicorum.* 12.

TAberna (Jo. Bapt.) *Synopſis Theologiæ Practicæ.* 8.

Tableau de la Cour de Rome, dans lequel ſont repréſentées la Politique & ſon Gouvernement, tant Spirituel que Temporel. 12.

Tablettes Guerrieres ou Cartes choiſies pour la commodité des Officiers & des Voyageurs, avec les plans des Forteresſes les plus expoſées aux revolutions preſentes. 12.

Tatiani Alexand. *Harmonia Evang. antiquiſſima verſio Theotiſca, & Iſidorus Hiſpal. de Nativitate, Paſſione Chriſti,* &c.

Temmik (Aloyſ.) *Philoſophia vera Theologiæ & Medicinæ Miniſtra.* 8.

Templum Honoris à Fundat. Hartmanno & Otthone Com. de Kirchberg erectum, ſeu Monach. Wiglingenſium vitæ integritas &c. 4. Fig.

Thauleri (Jo.) *Exercitia de Vita & Paſſione J. C.* 12.

Theologiæ Colonienſis aſſertiones juxta mentem D. Thomæ Aquin. 8.

Thomaſii (Chriſt.) *Introductio ad Philoſophiam Moralem.* 8.

Thomaſſin (le P.) Ancienne & nouvelle Diſcipline de l'Egliſe touchant les Benefices &c. 4. *Paris.*

——— Traité des Edits & des autres moyens pour établir & maintenir l'unité de l'Egliſe Catholique. 3 voll. 4. *Paris.*

Tirini (Jac.) *Commentarius in V. & N. Teſtamentum.* Fol.

Titii (Gott. Gerh.) *Specimen Juris publ. Romano-Germanici.* 8.

Toland, ſa Relation des Cours de Pruſſe & d'Hanover traduite de l'Anglois en François. 8.

Toullieu (Pet. de) *Diſſertationum Juridicarum trias.* 8.

La Tour Tenebreuſe & les Jours lumineux, Contes Anglois. 2 voll. 12.

Tourreil, Les Philippiques de Demoſthene traduites en François avec des Remarques. 12.

Traité des Quarrez ſublimes. 4.

Turretini (Jo. Alph.) *Orationes.* 4.

Vaſſor

VAſſor (Mich. le) Hiſtoire du Regne de Louïs XIII. Tom. VIII. [*le IX. a paru en* 1707.]
Vieira (Ant.) *Maria, Roſa Myſtica & Xaverius.* 3 *voll.* 4.
Vindiciæ Gobattanæ contra Epiſcopum Atrebatenſem. 4.
Vinholds (Georg. Andr.) *Periodi & Chriæ Ciceronianæ.* 12.
Voet (Jo.) *Commentarius ad Pandectas Tomi primi. Ed. II.* Fol.
Voſſii (Ger. Jo.) *Rhetorica contracta.* 8.

WOrpiz (Georg.) *Curſus annuus Præſidis Mariani.*
Wyk (Adr. van) *Tractatus Theol. de Prædeſtinatione divina.* 8.

YVon (P.) Idée générale, ordre & denouement de l'Apocalypſe. 8.

ZEntgravii (Jo. Joach,) *Comment. Analyſis & exegeſis, Epiſt. Paul. ad Titum.* 4.
Zierholdi (Jo. Wilh.) *Theologia verè Evangelica.* 8.
Zittmannus (Jo. Frid.) *Reſponſa Facultatis Medicæ Lipſienſis ad Quæſtiones & Caſus Medicinales ab Ann.* 1650. *uſque* 1700. 4.

VA 1 T 1562